Funciones de varias variables II

Copyright © 2018 Juan Marín Noguera, juan.marinn@um.es.

Esta obra está bajo la licencia Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional de Creative Commons (CC-BY-SA 4.0). Para ver una copia de esta licencia, visite https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.

Bibliografía:

- Funciones de varias variables II: Integración, Antonio José Pallarés Ruiz, Universidad de Murcia (Curso 2010–11).
- Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis, Richard L. Wheeden & Antoni Zygmund.
- Cálculo en variedades, Michael Spivak.
- Medida e Integración: Notas de clase para el curso 1998–1999, Antonio José Pallarés Ruiz, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia.

Capítulo 1

Integración Riemann en varias variables

FUVR2

Una **partición** de $[a, b]$ es una colección de puntos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ [...]. [...]

Sea $f \in \mathcal{R}[a, b]$, llamamos **integral indefinida** de f a la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $F(x) := \int_a^x f$. El **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO** afirma que, si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ y F es su integral indefinida, entonces F es continua en $[a, b]$ y si f es continua en $c \in (a, b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$, y esto también ocurre con los extremos del intervalo y las correspondientes derivadas laterales.

1.1. Integral de Riemann para funciones de varias variables

Llamamos **gráfica** de una función $f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ a

$$\operatorname{graf}(f) := \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \wedge y = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

y **subgrafo** a

$$\operatorname{subgraf}(f) := \\ \{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \wedge 0 \leq y \leq f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

El **volumen** del **rectángulo** n-dimensional $R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ se define como $v(R) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$. Si $n = 1$, R es un intervalo y $v(R)$ es su **longitud**; si $n = 2$, R es un rectángulo y $v(R)$ es su **área**, y si $n = 3$, R es un paralelepípedo recto y $v(R)$ es su **volumen** tridimensional.

Una **partición** sobre este rectángulo es una lista $P := (P_1, \ldots, P_n)$ en la que cada P_i es una partición de $[a_i, b_i]$. Si cada P_i divide el intervalo $[a_i, b_i]$ en k_i subintervalos, los $k_1 \cdots k_n$ rectángulos en los que P divide a R son los **subrectángulos** de la partición P.

Si $f : R \to \mathbb{R}$ es acotada y $P := (P_i)_{i=1}^n$ es una partición de R que lo divide en una cantidad finita de subrectángulos $\{S_i\}_{i=1}^N$, si para cada S_h denotamos $m_{S_h}(f) := \inf\{f(x)\}_{x \in S_h}$

y $M_{S_h}(f) = \sup\{f(x)\}_{x\in S_h}$, y definimos las **sumas inferior** y **superior** de f correspondientes a la partición P, respectivamente, como

$$s(f,P) := \sum_{h=1}^{N} m_{S_h}(f)v(S_h) \quad \text{y} \quad S(f,P) := \sum_{h=1}^{N} M_{S_h}(f)v(S_h)$$

Sean P y P' dos particiones del rectángulo n-dimensional R tales que $P' \succeq P$ ($\forall i \in \{1,\dots,n\}, P'_i \succeq P_i$ o, equivalentemente, cada subrectángulo de P' está contenido en uno de P) y $f : R \to \mathbb{R}$, entonces

$$s(f,P) \le s(f,P') \le S(f,P') \le S(f,P)$$

Demostración: Obviamente $s(f,P') \le S(f,P')$. Si P se divide en los subrectángulos $\{S_i,\dots,S_N\}$ y P' en $\{S'_1,\dots,S'_M\}$, dado un subrectángulo S_i de P que se expresa como unión de subrectángulos $S_{i1},\dots,S_{ik_i}$ de P', es claro que para $j \in \{1,\dots,k_i\}$, $m_S(f) = \text{ínf}\{f(x)\}_{x\in S_i} \le m_{S_{ij}}(f) = \text{ínf}\{f(x)\}_{x\in S_{ij}}$. Por otro lado, $v(S_i) = \sum_{j=1}^{k_i} v(S_{ij})$, con lo que $m_{S_i}(f)v(S_i) = m_{S_i}(f)\sum_{j=1}^{k_i} v(S_{ij}) = \sum_{j=1}^{k_i} m_{S_i}(f)v(S_{ij}) \le \sum_{j=1}^{k_i} m_{S_{ij}}(f)v(S_{ij})$ y entonces $s(f,P) = \sum_{i=1}^{N} m_{S_i}(f)v(S_i) \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k_i} m_{S_{ij}}(f)v(S_{ij}) = \sum_{i=1}^{M} m_{S'_i}(f)v(S'_i) = s(f,P')$. La prueba de que $S(f,P') \le S(f,P)$ se hace de forma análoga.

Definimos las **integrales superior e inferior de Riemann** de f en R, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
\overline{\int_R} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n &:= \text{ínf}\{S(f,P)\}_{P \text{ partición de } R} \\
\underline{\int_R} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n &:= \sup\{s(f,P)\}_{P \text{ partición de } R}
\end{aligned}$$

Por lo anterior, es claro que la integral inferior es siempre menor o igual a la superior. Si son iguales decimos que f es **integrable Riemann** en R ($f \in \mathcal{R}(R)$) con **integral** $\int_R f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$ igual a estas dos.

$f \in \mathcal{R}(R) \iff \forall\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) \le \varepsilon$.

$\Longrightarrow$] Basta tomar P y P' con $S(f,P) \le \int_R f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n + \frac{\varepsilon}{2}$ y $s(f,P') \ge \int_R f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n - \frac{\varepsilon}{2}$ y quedarnos con la partición $P \vee P'$ ($\{P_i \vee P'_i\}_{i=1}^n$).

$\Longleftarrow$] Si se cumple $0 \le \overline{\int_R} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n - \underline{\int_R} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n \le S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) \le \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, haciendo tender ε a 0 obtenemos la igualdad de las integrales superior e inferior.

La integral es un operador lineal: sean $f,g \in \mathcal{R}(R)$ y $c \in \mathbb{R}$, $f+g \in \mathcal{R}(R)$ con $\int_R (f+g)(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = \int_R f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n + \int_R g(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$, y $cf \in \mathcal{R}(R)$ con $\int_R (cf)(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n = c\int_R f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$. **Demostración:** Se deriva de que para $S \subseteq R$, $m_S(f) + m_S(g) \le m_S(f+g)$, $M_S(f+g) \le M_S(f) + M_S(g)$ y $M_S(cf) = cM_S(f)$.

También es un operador positivo. Sean $f, g \in \mathcal{R}(R)$:

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in R, f(x_1, \dots, x_n) \geq 0 \implies \int_R (x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \geq 0$.
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in R, f(x_1, \dots, x_n) \geq g(x_1, \dots, x_n) \implies \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \geq \int_R g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.
3. $|f| \in \mathcal{R}(R)$ y $\left|\int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n\right| \leq \int_R |f(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n$ (desigualdad triangular).

Definimos la **oscilación** de $f : R \to \mathbb{R}$ en $S \subseteq R$ como

$$\operatorname{osc}(f, S) := M_S(f) - m_S(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|\}_{x,y \in S}$$

y la oscilación de f en $x \in R$ como

$$\operatorname{osc}(f, x) := \operatorname{ínf}\{\operatorname{osc}(f, S \cap T)\}_{T \text{ rectángulo abierto centrado en } S}$$

Vemos que f es continua en x si y sólo si $\operatorname{osc}(f, x) = 0$, y que para cada $\varepsilon > 0$ y cada x donde f es continua existe un cubo abierto $C_x(d_x)$ centrado en x con diámetro d_x donde la oscilación de f es menor que ε.

TEM
Toda $f : (X, d) \to (Y, d')$ continua, siendo $(X, \mathcal{T}_d)$ compacto, es uniformemente continua.

Como **teorema**, toda $f : R \to \mathbb{R}$ continua definida en un rectángulo cerrado n-dimensional R es integrable Riemann en R.

1.2. Conjuntos de contenido y de medida nula

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene **medida** (n-dimensional) **nula** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(R_k)_k$ de rectángulos n-dimensionales cerrados tal que $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) < \varepsilon$. Sustituyendo los rectángulos cerrados por rectángulos abiertos obtenemos el mismo concepto.

$\implies$] Fijado ε, sea $(R_k)_k$ la sucesión de cerrados que cumple las propiedades y $0 < d < \varepsilon - \sum_{j=1}^{\infty} v(R_j)$. Para cada rectángulo R_k, tomamos un rectángulo abierto $R'_k \supseteq R_k$ tal que $v(R'_k) \leq R_k + \frac{d}{2^{k+1}}$, y vemos que, en efecto, $\sum_{j=1}^{\infty} v(R'_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{2^{k+1}} < \varepsilon$.

$\impliedby$] Fijado $\varepsilon > 0$, sea $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de rectángulos abiertos que cumple las propiedades, vemos que $N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{R_k}$ y que $\sum_{j=1}^{\infty} v(\overline{R_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} v(R_j) < \varepsilon$.

Como **teorema**, la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula. **Demostración:** Consideremos $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. Fijado ε, para cada $i \in \mathbb{N}$ utilizamos que S_i es de medida nula para recubrirlo con una sucesión $\{R_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}}$ cuyos volúmenes suman menos que $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Vemos que $\{R_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ es numerable y podemos describirlo como una sucesión que recubre N y cuyos volúmenes suman menos que ε, pues $\sum_{i,j=1}^{\infty} v(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} v(R_{ij})) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene **contenido** (n-dimensional) **nulo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de rectángulos n-dimensionales cerrados que cumplen las mismas condiciones que los de la definición de medida nula. Es claro que todo conjunto de contenido nulo tiene

medida nula. Como **teorema**, todo compacto en $\mathbb{R}^n$ de medida nula es de contenido nulo; basta usar un cubrimiento con rectángulos abiertos en la definición de medida nula y extraer un subrecubrimiento finito por compacidad.

Si $f : R \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann en el rectángulo cerrado R, entonces $\operatorname{graf}(f)$ tiene contenido $(m+1)$-dimensional nulo.

1.2.1. El conjunto de Cantor

Consideremos el intervalo $[0,1]$, que dividimos en 3 subintervalos y eliminamos el subintervalo abierto central, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. A continuación, de cada subintervalo cerrado restante, eliminamos el subintervalo abierto central de longitud la tercera parte del subintervalo original. Repitiendo este proceso indefinidamente lo que nos queda es el **conjunto de Cantor**, C. Observamos que un número está en el conjunto de Cantor si y sólo si su representación en base 3, $0.c_1c_2c_3\cdots c_n\cdots$, contiene sólo los dígitos 0 y 2, teniendo en cuenta que el número puede también acabar por una secuencia infinita de doses. Teoremas:

- C es incontable, con igual cardinalidad que $[0,1]$.
  La función $f : C \to [0,1]$ dada por $f(0.c_1c_2\cdots c_n\cdots_{(3)}) := 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\cdots\frac{c_n}{2}\cdots_{(2)}$ es suprayectiva, luego $|C| \geq |[0,1]|$, pero es claro que $|C| \leq |[0,1]|$, luego $|C| = |[0,1]|$.

- C es de medida nula.
  Al principio $[0,1]$ tiene longitud 1, y es fácil ver que si en un «paso» de la construcción el conjunto resultante tiene longitud n, en el siguiente tendrá longitud $\frac{2}{3}n$. Por tanto la longitud de C es $\lim_n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

- C no tiene puntos interiores.
  Como es de medida nula no contiene puntos de acumulación, pues para ello debería contener intervalos, de medida no nula.

- C está acotado.

- C es cerrado.
  Es el resultado de quitar a un cerrado ($[0,1]$) un abierto (la unión de los abiertos eliminados en su construcción).

- C no tiene puntos aislados.
  Dado $x \in C$ y $\varepsilon > 0$, sea n tal que $\frac{2}{3^n} < \varepsilon$, existe un punto, el resultado de cambiar la cifra n-ésima de x por un 2 si era un 0 o viceversa, cuya distancia a x es menor que ε.

- Dados $a, b \in C$ distintos, existe una partición $\{A, B\}$ de C con A y B cerrados, $a \in A$ y $b \in B$.
  Sea n la posición de una cifra (en base 3) en la que a y b difieren, basta hacer la partición según el valor de dicha cifra.

1.2.2. Caracterización

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado, si $f : A \to \mathbb{R}$ es acotada y $\varepsilon > 0$, $B := \{x \in A \mid \operatorname{osc}(f,x) \geq \varepsilon\}$ es cerrado. **Demostración:** Sea $x \in \mathbb{R}^n \backslash B$. Si $x \notin A$, existe una bola de centro x que no interseca

con A. Si $x \in A$, existe un rectángulo abierto $C \ni x$ con $\operatorname{osc}(f, c) < \varepsilon$, y para $y \in C$ existe δ_y tal que si $\|z - y\| < \delta_y$ entonces $\|x - z\| < \delta$, con lo que $\operatorname{osc}(f, y) < \varepsilon$ y $C \subseteq \mathbb{R}^n \backslash B$.

El **teorema de Lebesgue de caracterización de las funciones integrables** afirma que si R es un rectángulo n-dimensional cerrado y $f : R \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces $f \in \mathcal{R}(R)$ si y sólo si $B := \{x \in R \mid f \text{ no es continua en } x\}$ tiene medida nula.

$\Longrightarrow$] Sea $B_k := \{x \in R \mid o(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$, basta probar que cada B_k tiene medida nula dado que $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Dado $\varepsilon > 0$, sean P una partición de R con $S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{k}$ y $\mathcal{S}$ el conjunto de subrectángulos de P que cortan a B_k , entonces para $S \in \mathcal{S}$ se tiene $M_S(f) - m_S(f) \geq \frac{1}{k}$ y

$$\frac{1}{k} \sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) \leq \sum_{S \in \mathcal{S}} (M_S(f) - m_S(f)) v(S) \leq S(f, P) - s(f, P) < \frac{\varepsilon}{k}$$

con lo que $\sum_{S \in \mathcal{S}} v(S) < \varepsilon$.

$\Longleftarrow$] Fijado $\varepsilon > 0$, sea K tal que $|f(x)| \leq K \forall x \in R$, y tenemos que $M_N(f) - m_N(f) \leq 2K \forall N \subseteq R$. Consideramos el conjunto de puntos donde $\operatorname{osc}(f, x) \geq \frac{\varepsilon}{2v(R)}$, un cerrado de medida nula y por tanto un compacto de contenido nulo, que podemos cubrir con una cantidad finita de abiertos N_k tales que $\sum_k v(N_k) < \frac{\varepsilon}{4K}$, y por tanto $\sum_k \operatorname{osc}(N_k, f) v(N_k) < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \frac{\varepsilon}{2}$. Es claro que $C := R \backslash \bigcup_k N_k$ es compacto, y como para cada $x \in C$ podemos tomar un S_x abierto tal que $\operatorname{osc}(f, S_x) < \frac{\varepsilon}{2v(R)}$, existe un subrecubrimiento finito S_{x_i} a partir de este, de modo que $\sum_i \operatorname{osc}(f, S_{x_i}) v(S_{x_i}) < \frac{\varepsilon}{2v(R)} \cdot v(R) = \frac{\varepsilon}{2}$ La partición P cuyos subintervalos están contenidos bien en un rectángulo S_{x_i} o N_k cumple que $S(f, P) - s(f, P) \leq \sum_k \operatorname{osc}(f, N_k) v(N_k) + \sum_i \operatorname{osc}(f, S_{x_i}) v(S_{x_i}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

1.2.3. Conjuntos medibles Jordan

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado es **medible Jordan** si su **función característica**,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

es integrable Riemann en un rectángulo cerrado $R \supseteq A$, y se define el **volumen** n-dimensional de A como

$$v(A) := \int_R \chi_A(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Equivalentemente, A es medible Jordan si y sólo si su frontera, $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}$, tiene medida nula. Se dice que una función acotada $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann en A si $f\chi_A \in \mathcal{R}(R)$. Por ejemplo, si N tiene contenido nulo y $f : N \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces f es integrable Riemann en N y $\int_N f(x) dx = 0$.

1.3. Teorema de Fubini

Sean $R_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $R_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ rectángulos cerrados de dimensiones respectivas n y m, $R = R_1 \times R_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ un rectángulo cerrado $(n + m)$-dimensional y $f : R \to \mathbb{R}$ una

función acotada. Para cada $x \in R_1$ definimos $lf_x : R_2 \to \mathbb{R}$ como $lf_x(y) := f(x,y)$, $s_{lf}(x) := \underline{\int_{R_2}} lf_x(y_1,\dots,y_m)dy_1\cdots dy_m$ y $S_{lf}(x) := \overline{\int_{R_2}} lf_x(y_1,\dots,y_m)dy_1\cdots dy_m$, y para cada $y \in R_2$ definimos $rf_y(x) := f(x,y)$, $s_{rf}(y) := \underline{\int_{R_1}} rf_y(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_m$ y $S_{rf}(y) := \overline{\int_{R_1}} rf_y(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_m$. Si $f \in \mathcal{R}(R)$ entonces $s_{lf}, S_{lf} \in \mathcal{R}(R_1)$, $s_{rf}, S_{rf} \in \mathcal{R}(R_2)$ y

$$\int_R f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)dx_1\cdots dx_n dy_1\cdots dy_m =$$
$$= \int_{R_1} s_{lf}(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n = \int_{R_1} S_{lf}(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n =$$
$$= \int_{R_2} s_{rf}(y_1,\dots,y_m)dy_1\cdots dy_m = \int_{R_2} S_{rf}(y_1,\dots,y_m)dy_1\cdots dy_m$$

En la práctica esto significa que

$$\int_R f(\vec{x},\vec{y})d\vec{x}d\vec{y} = \int_{R_1}\left(\int_{R_2} f(\vec{x},\vec{y})d\vec{y}\right)d\vec{x} = \int_{R_2}\left(\int_{R_1} f(\vec{x},\vec{y})d\vec{x}\right)d\vec{y}$$

donde $d\vec{x} := dx_1\cdots dx_n$ y $d\vec{y} := dy_1\cdots dy_m$.

FUVR2

1.4. Cálculo de primitivas

- $\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \forall n \neq -1$; $\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C \forall u \neq 0$.
- $\int e^u u'\,dx = e^u + C$; $\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \forall a > 0, a \neq 1$.
- $\int \cos u\, u'\,dx = \sin u + C$; $\int \sin u\, u'\,dx = -\cos u + C$.
- $\int \cosh u\, u'\,dx = \sinh u + C$; $\int \sinh u\, u'\,dx = \cosh u + C$.
- $\int \frac{u'}{\sin^2 u}dx = \int \frac{u'}{\sinh^2 u}dx = -\cot u + C$; $\int \frac{u'}{\cos^2 u}dx = \int \frac{u'}{\cosh^2 u}dx = \tan u + C$.
- $\int \frac{u'}{1+u^2}dx = \arctan u + C$; $\int \frac{u'}{1-u^2}dx = \arg\tanh u + C$.
- $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \arcsin u + C = -\arccos u + C'$.
- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}dx = \arg\sinh u + C$; $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}dx = \arg\cosh u + C$.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \arg\cosh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \arg\sinh(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \qquad \arg\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

1.4.1. Integración por partes

Sean $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ con primitivas respectivas F y G,

$$\int_a^b Fg = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b fG$$

lo que suele escribirse como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

1.4.2. Cambio de variable

Como **teorema**, sea $\varphi : [c,d] \to [a,b] \in \mathcal{C}^1[c,d]$ con $\varphi(c) = a$ y $\varphi(d) = b$, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \varphi)\varphi'$$

1.4.3. Funciones racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios y queremos resolver $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$. Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el de $Q(x)$ hacemos $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ para que el grado del numerador sea menor que el del denominador. Entonces descomponemos en fracciones simples.

Descomponemos $Q(x)$ como $Q(x) = \prod_{i=1}^r (x-a_i)^{m_i} \prod_{i=1}^s (x^2 + p_i x + q_i)^{n_i}$, donde $q_i > \frac{p_i^2}{4}$ para que los factores sean irreducibles. Entonces (si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$) podemos expresar la fracción como

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{n_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j}$$

Resolvemos los $A_{k,i}$, $M_{k,i}$, $N_{k,i}$ y nos queda hallar la integral de cada sumando como sigue:

- $\int \frac{A}{x-a}dx = A \ln|x-a| + C$.
- $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$, donde $n \in 2, 3, \ldots$.
- $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} \ln\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + c^2\right) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{c} \arctan\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right) + C$, donde $c = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

1.4.4. Funciones que contienen $\cos x$ y $\sin x$

En general, haremos $t = \tan\frac{x}{2}$ y entonces

$$\cos x = \frac{\cos(2\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{\text{div. } \cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{\sin(2\frac{x}{2})}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \overset{\text{div. } \cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$x = 2\arctan t \qquad \text{y} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Si la función es de la forma $f(x) = g(\sin x)\cos x$, siendo g una función racional, hacemos $t = \sin x$, y si es $f(x) = g(\cos x)\sin x$ hacemos $t = \cos x$. Si es $f(x) = g(\tan x)$ hacemos $\tan x = t$, y podemos llegar a esta situación cuando al sustituir $\sin x$ por $\cos x \tan x$ quedan solo potencias pares de $\cos x$, y hacemos $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.

En el caso $f(x) = \cos^n x \sin^m x$, si n es impar hacemos $t = \sin x$, si m es impar, $t = \cos x$, y si ambos son pares, usamos $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ para «reducir el grado».

1.4.5. Funciones de la forma $f(e^x)$

Hacemos el cambio $t = e^x$ y $dt = e^x dx$, y esto también sirve para el coseno y seno hiperbólicos (cosh y sinh).

1.4.6. Funciones que contienen $\sqrt{ax^2+2bx+c}$

Llamamos $d := \frac{ac-b^2}{a}$ y se tiene $ax^2+2bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + d$. Hacemos entonces el cambio de variable $t = x + \frac{b}{a}$ y a continuación:

- Si $a > 0$ y $d > 0$ hacemos $at^2 = d\tan^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = [...]\sqrt{d}\sec u$ y $dt = \sqrt{\frac{d}{a}}\sec^2 u\, du$. También podemos hacer $at^2 = d\sinh^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = [...]\sqrt{d}\cosh u$ y $dt = \sqrt{\frac{d}{a}}\cosh u\, du$.

- Si $a > 0$ y $d < 0$ hacemos $at^2 = -d\sec^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = [...]\sqrt{-d}\tan u$ y $dt = \sqrt{-\frac{d}{a}}\sec u \tan u\, du$. También podemos hacer $at^2 = -d\cosh^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = [...]\sqrt{-d}\sinh u$ y $dt = \sqrt{-\frac{d}{a}}\sinh u\, du$.

- Si $a < 0$ y $d > 0$ hacemos $at^2 = -d\sin^2 u$ y entonces $\sqrt{at^2+d} = [..]\sqrt{d}\cos u$ y $dt = \sqrt{-\frac{d}{a}}\cos u\, du$.

1.5. Cambio de variable

Sea Ω un abierto y $T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, llamamos **jacobiano** de T en $a \in \Omega$ a la matriz cuadrada asociada a $dT(a)$, $\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(a)\right)_{ij}$. El **teorema de cambio de variable** afirma que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto medible Jordan y $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función inyectiva diferenciable con derivadas parciales continuas tal que $\forall x \in \Omega, \det(dg(x)) \neq 0$, si $f : T(\Omega) \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann en $T(\Omega)$ entonces $f \circ T$ es integrable Riemann en Ω y

$$\int_{g(A)} f(\vec{x})d\vec{x} = \int f(T(\vec{y}))|\det(dg(\vec{y}))|d\vec{y}$$

Algunos cambios de variable importantes:

- **Coordenadas polares** en $\mathbb{R}^2$: Los puntos vienen dados por la distancia al origen, y el ángulo entre el eje OX y el vector desde el origen al punto. La función de cambio de variable es $T(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, inyectiva en cualquier banda de la forma $(0, +\infty) \times (a, b)$ con $b - a \leq 2\pi$, y

$$|dT(\rho, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

- **Coordenadas cilíndricas** en $\mathbb{R}^3$: Los puntos vienen dados por las coordenadas de (x, y) en polares y la coordenada z. La función de cambio es $T(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, inyectiva en cualquier banda de la forma $(0, +\infty) \times (a, b) \times \mathbb{R}$ con $b - a \leq 2\pi$, y

$$|dT(\rho, \theta, z)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

- **Coordenadas esféricas** o **polares** en $\mathbb{R}^3$: Los puntos vienen dados por la distancia al origen; el ángulo entre el eje OX y la proyección en el plano XY del vector del origen al punto, y el ángulo entre el eje OZ y el vector del origen al punto. La función de cambio es $T(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho, \rho\cos\varphi)$, inyectiva en cualquier banda de la forma $(0, +\infty) \times (a, b) \times (0, \pi)$ con $b - a \leq 2\pi$, y

$$|dT(\rho, \theta, \varphi)| = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

1.6. La integral de Riemann-Stieltjes

Sean $f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $P = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ una partición del intervalo, llamamos **suma de Riemann-Stieltjes** de f con respecto a φ asociada a la partición P a cualquier suma de la forma

$$R(f, \varphi, P, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))$$

donde $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i] \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Si existe el límite de estas sumas cuando $|P| := \sup\{t_i - t_{i-1}\}_{i=1}^n$ tiende a 0 se dice que f es **integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes** con respecto a φ en el intervalo $[a, b]$, y a este límite lo llamamos **integral de Riemann-Stieltjes** de f con respecto a φ en $[a, b]$, denotado como

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f \, d\varphi$$

Vemos que si φ es la identidad entonces la integral es exactamente la de Riemann. Denotamos $\lambda_\varphi([a, b]) := \varphi(b) - \varphi(a)$. Para que esta medida sea positiva es necesario que φ sea creciente. Una función $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua por la derecha** en $c \in D$ si $\lim_{x \to c^+} \varphi(x) = \varphi(c)$. Si se quiere que λ_φ se comporte bien al hacer uniones crecientes o intersecciones decrecientes de intervalos, es necesario que φ sea continua por la derecha.

f es integrable Riemann-Stieltjes con respecto a φ en $[a, b]$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall P, Q \in [a, b], (|P|, |Q| < \delta \implies |R(f, \varphi, P) - R(f, \varphi, Q)| < \varepsilon)$.

$\Longrightarrow$] Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$ entonces $\left| R(f, \varphi, P) - \int_a^b f \, d\varphi \right| < \frac{\varepsilon}{2}$, pero si P y Q son son particiones de $[a, b]$ con $|P|, |Q| < \delta$, entonces

$$|R(f, \varphi, P) - R(f, \varphi, Q)| \leq \left| R(f, \varphi, P) - \int_a^b f \, d\varphi \right| + \left| \int_a^b f \, d\varphi - R(f, \varphi, Q) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$] Dada una sucesión de particiones $(P_k)_k$ de $[a, b]$ con $|P_k| \to 0$, por la condición se tiene que $(R(f, \varphi, P_k))_k$ es de Cauchy y por tanto converge hacia un $I \in \mathbb{R}$.

Si f es continua en $[a, b]$ y φ es monótona creciente definida en $[a, b]$, entonces f es integrable Riemann-Stieltjes respecto a φ en $[a, b]$. **Demostración:** Al ser f continua en un compacto, es uniformemente continua, luego para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\varphi(b) - \varphi(a)}$. Sean $P := \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ y $Q := \{a = y_0 < \cdots < y_m = b\}$ particiones con $|P|, |Q| < \frac{\delta}{2}$ y $P \vee Q =: \{a = t_0 < \cdots < t_p = b\}$, podemos escribir las sumas de Riemann-Stieltjes asociadas a P y Q como $R(f, \varphi, P) = \sum_{i=1}^n f(\chi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) = \sum_{j=1}^p f(\chi_j^*)(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}))$ y $R(f, \varphi, Q) = \sum_{k=1}^m f(\eta_i)(\varphi(y_k) - \varphi(y_{k-1})) = \sum_{j=1}^p f(\eta_j^*)(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}))$, respectivamente, donde $\chi_j^* = \chi_i$ si $[t_{j-1}, t_j] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$ y $\eta_j^* = \eta_k$ si $[t_{j-1}, t_j] \subseteq [y_{k-1}, y_k]$. De aquí, $|\chi_j^* - \eta_j^*| \leq |\chi_j^* - t_j| + |t_j - \eta_j^*| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$, y con esto

$$|R(f, \varphi, P) - R(f, \varphi, Q)| \leq \sum_{j=1}^p |f(\chi_j^*) - f(\eta_j^*)|(\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) <$$

$$< \sum_{j=1}^p \frac{\varepsilon}{\varphi(b) - \varphi(a)} (\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})) = \frac{\varepsilon}{\varphi(b) - \varphi(a)} (\varphi(b) - \varphi(a)) = \varepsilon$$

Por tanto si f es continua en $[a, b]$ y φ es una función creciente de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$, se cumple que

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx$$

Propiedades: Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables Riemann-Stieltjes en $[a, b]$ respecto a $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\int_a^b (\lambda f) d\varphi = \int_a^b f\, d(\lambda\varphi) = \lambda \int_a^b f\, d\varphi$.
2. $\int_a^b (f+g) d\varphi = \int_a^b f\, d\varphi + \int_a^b g\, d\varphi$.
3. Si $f(t) \geq g(t) \forall t \in [a,b]$ y φ es monótona creciente, $\int_a^b f\, d\varphi \geq \int_a^b g\, d\varphi$.
4. $\int_a^b f\, d(\varphi+\psi) = \int_a^b f\, d\varphi + \int_a^b f\, d\psi$.
5. Para $c \in (a,b)$, $\int_a^c f\, d\varphi + \int_c^b f\, d\varphi = \int_a^b f\, d\varphi$.

La **integración por partes** en Riemann-Stieltjes se basa en que, si existe $\int_a^b f\, d\varphi$ entonces también existe $\int_a^b \varphi\, df$ y

$$\int_a^b \varphi\, df = (f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)) - \int_a^b f\, d\varphi$$

Demostración: Sea $P = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ y $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i] \forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $Q = \{a = \xi_0 < \cdots < \xi_n < \xi_{n+1} = b\}$, $x_1 \coloneqq t_0 = a \in [\xi_0, \xi_1]$, $x_i \coloneqq t_{i-1} \in [\xi_{i-1}, \xi_i] \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x_{n+1} \coloneqq t_n = b \in [\xi_n, \xi_{n+1}]$. Entonces

$$R(\varphi, f, P, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(f(t_i) - f(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(t_i)\varphi(\xi_i) - \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})\varphi(\xi_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)\varphi(\xi_i) + f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(\xi_1) - \sum_{i=2}^n f(t_{i-1})\varphi(\xi_i) =$$

$$= f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - f(a)(\varphi(\xi_1) - \varphi(a)) + \sum_{i=2}^n f(x_i)\varphi(\xi_{i-1}) - \sum_{i=2}^n f(x_i)\varphi(\xi_i) =$$

$$= f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \sum_{i=1}^n f(x_i)(\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - R(f, \varphi, Q, \{x_i\})$$

Basta pues tomar límites en esta última expresión cuando $|Q| \leq 2|P| \to 0$.

Capítulo 2

Medidas de conjuntos

2.1. σ-álgebras

Un **álgebra de partes** de $\Omega \neq \emptyset$ es un conjunto no vacío $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tal que $A \in \mathcal{A} \implies A^{\complement} \in \mathcal{A}$ y $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$. Así, $\Omega = A \cup A^{\complement} \in \mathcal{A}$, $\emptyset = \Omega^{\complement} \in \mathcal{A}$, $A \cap B = (A^{\complement} \cup B^{\complement})^{\complement} \in \mathcal{A}$, $A \backslash B = A \cap B^{\complement} \in \mathcal{A}$ y $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{A}$ (diferencia simétrica).

Una **σ-álgebra de partes** de Ω es un álgebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tal que si $\{A_n\}_n \subseteq \Sigma$ entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$, y entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^{\complement}\right)^{\complement} \in \Sigma$. Para que un álgebra $\mathcal{A}$ sea una σ-álgebra basta que la condición adicional se cumpla para sucesiones crecientes ($A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$), pues si $A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$, tomando la sucesión creciente $U_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, vemos que $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \in \mathcal{A}$.

La mínima σ-álgebra de partes de Ω es $\{\emptyset, \Omega\}$, la **σ-álgebra trivial**, y la máxima es $\mathcal{P}(\Omega)$. Si Ω es infinito, la familia formada por los subconjuntos finitos de Ω y sus complementarios es una σ-álgebra, al igual que la formada por los subconjuntos numerables y sus complementarios si Ω es infinito no numerable.

Si $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha \in A} \neq \emptyset$ es un conjunto de álgebras, su intersección $\Sigma := \bigcap_{\alpha \in A} \Sigma_\alpha$ es un álgebra, y si los Σ_α son todos σ-álgebras la intersección también lo es, sin más que aplicar la definición en cada álgebra del conjunto. Así, llamamos **σ-álgebra generada** por $\mathcal{D}$, $\sigma(\mathcal{D})$, a la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{D}$, es decir, la intersección de todas ellas.

Sea T un espacio topológico, llamando $\mathcal{J}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$ a las familias formadas, respectivamente, por los abiertos, cerrados y compactos de T, llamamos **σ-álgebra de Borel** de T a $\mathcal{B}(T) := \sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{F})$, y sus elementos son los **conjuntos de Borel**. Si T es un abierto en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(T) = \sigma(\mathcal{K})$, pues cada abierto es unión numerable de compactos.

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, escribimos $a < b :\iff a_i < b_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$, y análogamente para $a \leq b$. Si $a < b$, escribimos $[a, b) := \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$, y definimos $[a, b]$, (a, b) y $(a, b]$ de forma análoga. Si $b_i - a_i = \delta > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$, se dice que el intervalo es un **cubo** n-dimensional de lado δ. $[a, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **cubo diádico semiabierto** de orden $q \in \mathbb{N}$ si su lado es 2^{-q} y para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe $m_i \in \mathbb{Z}$ con $a_i = m_i 2^{-q}$. Fijado q, cada punto de $\mathbb{R}^n$ está en un único cubo diádico semiabierto de orden q, y si $q < p$ y Q y P son cubos diádicos semiabiertos de órdenes respectivos q y p entonces $P \subseteq Q$ o $P \cap Q = \emptyset$.

Cada abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ se puede expresar como unión de una sucesión numerable de cubos

diádicos semiabiertos disjuntos. **Demostración:** Para cada $x \in G$ llamamos Q_x al mayor cubo diádico Q con $x \in Q \subseteq G$, que existe por ser G abierto, y entonces $\bigcup_{x \in G} Q_x = G$ y, como sólo hay una cantidad de cubos diádicos numerables en total, $\{Q_x\}_{x \in G}$ es numerable.

2.2. Medidas

Dada una σ-álgebra Σ de partes de Ω, una función $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ es una **medida** (numerablemente aditiva) sobre Σ si $\mu(\emptyset) = 0$ y para toda familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ de conjuntos disjuntos se cumple $\sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$. Si existe decimos que (Ω, Σ) es un **espacio medible**.

Un **espacio de medida** es una terna (Ω, Σ, μ) donde (Ω, Σ) es un espacio medible y μ es una medida sobre este. Decimos que $E \in \Sigma$ es **σ-finito** si E se puede expresar como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ con $\{E_n\}_n \subseteq \Sigma$ y $\mu(E_n) < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$. Si Ω es σ-finito decimos que el espacio de medida (Ω, Σ, μ) es σ-finito y la medida μ es σ-finita. Por ejemplo, sean $\Omega \neq \emptyset$, $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega)$ y $f : \Omega \to [0, +\infty]$, la función dada por $\mu(E) := \sum_{x \in E} f(x)$ es una medida en Σ, que es σ-finita si y sólo si $\{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$ es numerable.

Propiedades de un espacio de medida:

1. **Monotonía**: Para $A, B \in \Sigma$ con $A \subseteq B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$, y si además $\mu(B) < +\infty$ entonces $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

$$B = A \cup (B \backslash A) \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$$

2. **Subaditividad**: Para $\{A_n\}_n \subseteq \Sigma$, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
   Si llamamos $B_1 := A_1$ y $B_n := A_n \backslash \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$ para $n > 1$, nos queda una sucesión $\{B_n\}_n \subseteq \Sigma$ de elementos disjuntos con $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, y usando la monotonía, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

3. **Continuidad superior**: Si $\{A_n\}_n \subseteq \Sigma$ es creciente $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots)$, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
   Construyendo $(B_n)_n$ como en la prueba anterior, tenemos $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ para $n > 1$ y $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$, con lo que $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \lim_n \mu(\bigcup_{k=1}^n B_k) = \lim_n \mu(A_n)$.

4. **Continuidad inferior**: Si $\{A_n\}_n \subseteq \Sigma$ es decreciente $(A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots)$ con $\mu(A_m) < +\infty$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.
   Basta aplicar la continuidad superior a la sucesión creciente $(A_m \backslash A_{n+m})_n$, pues

$$\mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \mu\left(A_m \backslash \bigcup_n (A_m \backslash A_{n+m})\right) = \mu(A_m) - \mu\left(\bigcup_n (A_m \backslash A_{n+m})\right) =$$
$$= \mu(A_m) - \lim_n \mu(A_m \backslash A_{n+m}) = \mu(A_m) - (\mu(A_m) - \lim_n \mu(A_{n+m})) = \lim_n \mu(A_{n+m})$$

.

2.3. Medida exterior de Lebesgue

Una **medida exterior** sobre Ω es una función $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ tal que $\mu^*(\emptyset) = 0$, $A \subseteq B \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ y si $\{A_n\}_n$ es una sucesión de subconjuntos de Ω entonces $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Definimos la **medida exterior n-dimensional de Lebesgue** de un subconjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ como

$$\lambda_n^*(B) := \text{ínf}\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}} v([a_k, b_k)) \mid B \subseteq \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} [a_k, b_k)\right\}$$

Como **teorema**:

1. Cada conjunto $N \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida nula tiene medida exterior 0.

2. Para cada rectángulo n-dimensional R, $\lambda_n^*(R) = v(R)$.

   $\leq$] Como el borde de R tiene medida nula, si los extremos de R son $a < b$, $\lambda_n^*(R) = \lambda_n^*([a, b)) \leq v([a, b)) = v(R)$.

   $\geq$] Como el borde de R tiene medida nula podemos suponer que es cerrado y por tanto compacto, y si $R \subseteq \bigcup_k [a_k, b_k)$, existe $a'_k < a_k$ tal que $v((a'_k, b_k)) \leq v([a_k, b_k)) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Al ser R compacto, existen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tales que $R \subseteq \bigcup_{i=1}^m (a'_{k_i}, b_{k_i})$, y entonces $v(R) \leq \sum_{i=1}^m v((a'_{k_i}, b_{k_i})) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} v([a_k, b_k)) + \varepsilon$. Tomando ínfimos en los cubrimientos de R de la forma dada y haciendo ε tender a 0, tenemos $v(R) \leq \lambda_n^*(R)$.

3. Para cada familia finita de rectángulos disjuntos $\{R_1, \ldots, R_p\}$, $\lambda_n^*(\bigcup_{j=1}^p R_j) = \sum_{j=1}^p \lambda_n^*(R_j)$.

   $\leq$] Por definición.

   $\geq$] Haciendo los R_j un poco más pequeños podemos suponer que son compactos disjuntos y por tanto separados a una distancia $\delta > 0$ usando $\|\cdot\|_\infty$. Si $\bigcup_{j=1}^p R_j$ está cubierto por una unión numerable de rectángulos semiabiertos $[a_k, b_k)$ con $\sum_k v([a_k, b_k)) \leq \lambda_n^*(\bigcup_{j=1}^p R_j) + \varepsilon$, podemos suponer que los lados de estos son menores que δ y por tanto solo pueden cortan a uno de los R_j. Usando el apartado anterior,

$$\sum_{j=1}^p \lambda_n^*(R_j) = \sum_{j=1}^p v(R_j) \leq \sum_{j=1}^p \sum_{[a_k,b_k)\cap R_j \neq \emptyset} v([a_k, b_k)) \leq$$

$$\leq \sum_k v([a_k, b_k)) \leq \lambda_n^*\left(\bigcup_{j=1}^p R_j\right) + \varepsilon$$

   y haciendo tender ε a 0 obtenemos $\sum_{j=1}^p \lambda_n^*(R_j) \leq \lambda_n^*(\bigcup_{j=1}^p R_j)$.

Para $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ existe un abierto $A \supseteq S$ con $\lambda_n^*(A) \leq \lambda_n^*(S) + \varepsilon$, y por tanto $\lambda_n^*(S) = \text{ínf}\{\lambda_n^*(A) \mid A \supseteq S \text{ abierto}\}$. **Demostración:** Sea $([a_k, b_k))_k$ una sucesión de rectángulos semiabiertos disjuntos dos a dos con $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k)$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} [a_k, b_k) < \lambda_n^*(S) + \frac{\varepsilon}{2}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un rectángulo abierto (a'_k, b_k) con $v((a'_k, b_k)) < v([a_k, b_k))\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Entonces $\lambda_n^*(A := \bigcup_{k=1}^{+\infty}(a'_k, b_k)) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}((a'_k, b_k)) < \sum_{k=1}^{+\infty}(v([a_k, b_k)) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) = \sum_{k=1}^{+\infty}[a_k, b_k) + \frac{\varepsilon}{2} < \lambda_n^*(S) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda_n^*(S) + \varepsilon$.

2.4. Medida de Lebesgue

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ es **medible** (**Lebesgue**) si $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon : (M' \subseteq A_\varepsilon \wedge \lambda_n^*(A_\varepsilon \backslash M) < \varepsilon)$. Si M es medible, su **medida de Lebesgue** es $\lambda_n(M) := \lambda_n^*(M)$. Todos los abiertos, conjuntos de medida nula y rectángulos n-dimensionales son medibles.

Como **teorema**, si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, existe una sucesión de abiertos $(A_k)_k$ tal que su intersección $B := \bigcap_k A_k$ cumple que $M \subseteq B$ y $B \backslash M$ tiene medida nula. **Demostración:** Basta tomar los A_k tales que $M \subseteq A_k$ y $\lambda_n^*(A_k \backslash M) < \frac{1}{k}$ y ver que $\lambda_n(B \backslash M) \leq \lambda_n(A_k \backslash M) < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N}$.

Llamamos **conjuntos** G_δ a las intersecciones numerables de abiertos, por lo que este teorema dice que los conjuntos medibles son diferencias de un G_δ y un conjunto de medida nula. Si $M := \bigcup_k M_k$ es unión numerable de conjuntos medibles, M es medible y $\lambda_n(M) \leq \sum_k \lambda_n(M_k)$ sin más que incluir cada M_k en un abierto A_k a distancia $\lambda_n^*(A_k \backslash M_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

Cada cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible. **Demostración:** Basta ver que los compactos $K \subseteq \mathbb{R}^n$ lo son, pues los cerrados son unión numerable de compactos. Veamos primero que si $d(A, B) > 0$ entonces $\lambda_n^*(A \cup B) = \lambda_n^*(A) + \lambda_n^*(B)$. Ahora bien, fijado $\varepsilon > 0$ existe $A \supseteq K$ con $\lambda_n(A) \leq \lambda_n^*(K) + \frac{\varepsilon}{2} < +\infty$. Como $A \backslash K$ es abierto, es unión numerable de cubos diádicos disjuntos $([a_k, b_k))_k$, con lo que $\lambda_n^*(A \backslash K) = \sum_k \lambda_n^*([a_k, b_k))$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $[a_k, b_k'] \subseteq [a_k, b_k)$ con $\lambda_n([a_k, b_k)) \leq \lambda_n^*([a_k, b_k']) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Como K es compacto, está a distancia positiva de $\bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k']$ y por lo demostrado al principio, $\lambda_n(A) \geq \lambda_n^* \left(K \cup \bigcup_{k=1}^N [a_k, b_k']\right) = \lambda_n^*(K) + \sum_{k=1}^n \lambda([a_k, b_k'])$ y despejando de aquí queda que $\lambda_n^*(A \backslash K) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_k \lambda_n^*([a_k, b_k']) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda_n(A) - \lambda_n^*(K) < \varepsilon$.

Llamamos **conjuntos** F_σ a las uniones numerables de conjuntos cerrados, y sabemos que son medibles. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible, $M^\complement$ también lo es. **Demostración:** Existe un G_δ $B := \bigcap_k A_k$ tl que $M = B \backslash N$ con N de medida nula, luego $M^\complement = (B \backslash N)^\complement = N \cup B^\complement = N \cup B$ es medible por ser unión de N que, al tener medida nula, es medible, y $B^\complement = \bigcup A_k^\complement$, que es un F_σ.

Con esto tenemos, como **teorema**, que la familia de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ es una σ-álgebra. Además, M es medible si y sólo si para $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $F_\varepsilon \subseteq M$ con $\lambda_n^*(M \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$, si y sólo si existen un F_σ C y un N de medida nula con $M = C \cup N$.

Como **teorema**, si $(M_k)_k$ es una sucesión de medibles disjuntos, entonces

$$\lambda\left(\bigcup_k M_k\right) = \sum_k \lambda(M_k)$$

Demostración: Basta ver que $\lambda(\bigcup_k M_k) \geq \sum_k \lambda(M_k)$. Supongamos primero que los M_k son acotados, y fijado $\varepsilon > 0$, para cada k elegimos un compacto $F_k \subseteq M_k$ con $\lambda(F_k) < \lambda(M_k) < \lambda(F_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Estos compactos son disjuntos, luego $\sum_{k=1}^m \lambda(M_k) < \sum_{k=1}^m \lambda(F_k) + \varepsilon = \lambda(\bigcup_k F_k) + \varepsilon \leq \lambda(\bigcup_k M_k) + \varepsilon$, y haciendo a m tender a infinito obtenemos la desigualdad buscada. Pasando al caso general, existe una sucesión de rectángulos semiabiertos disjuntos $[a_j, b_j)$ con $\bigcup_k M_k \subseteq \bigcup_j [a_j, b_j)$, y aplicando lo anterior al conjunto numerable de medibles acotados y disjuntos $\{M_k \cap [a_j, b_j)\}_{j,k \in \mathbb{N}}$, se tiene $\sum_k \lambda(M_k) = \sum_j \sum_k \lambda(M_k \cap [a_j, b_j)) = \sum_j \lambda\left(\bigcup_k M_k \cap [a_j, b_j)\right) = \lambda\left(\bigcup_j \bigcup_k M_k \cap [a_j, b_j)\right) = \lambda\left(\left(\bigcup_k M_k\right) \cap \left(\bigcup_j [a_j, b_j)\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_k M_k\right)$.

El **teorema de Caratheodory** afirma que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue si y sólo si E es λ_n^*-medible, es decir, $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n, \lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(A \cap E) + \lambda_n^*(A \cap E^\complement)$.

$\Longrightarrow$] Dado A, $\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*((A \cap E) \cup (A \cap E^\complement)) \leq \lambda_n^*(A \cap E) + \lambda_n^*(A \cap E^\complement)$. Para la otra desigualdad, aproximamos los cubrimientos de A con rectángulos semiabiertos mediante

cubrimientos abiertos un poco más grandes y encontramos un G_δ medible $H \supseteq A$ con $\lambda_n^*(A) = \lambda(H) = \lambda(H \cap E) + \lambda(H \cap E^{\complement}) \geq \lambda_n^*(A \cap E) + \lambda_n^*(A \cap E^{\complement})$, ya que H y E son medibles.

$\Longleftarrow$] Si la medida exterior de E es finita, vemos que existe un G_δ medible $H \supseteq E$ con $\lambda_n^*(E) = \lambda(H)$, y poniendo $A = H$, $\lambda_n^*(E) = \lambda(H) = \lambda_n^*(H \cap E) + \lambda_n^*(H \cap E^{\complement}) = \lambda_n^*(E) + \lambda_n^*(H \backslash E)$, con lo que $H \backslash E$ tiene medida nula y por tanto es medible y $E = H \backslash (H \backslash E)$ también lo es. Si la medida exterior de E es infinita, sea $E_k = E \cap [-k, k]^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$, cada uno de estos conjuntos tiene medida exterior finita y se puede aproximar exteriormente por un G_δ H_k con $\lambda(H_k) = \lambda_n^*(E_k)$, y haciendo $A = H_k$ para cada k, $\lambda(H_k) = \lambda_n^*(H_k \cap E) + \lambda_n^*(H_k \cap E^{\complement}) \geq \lambda_n^*(E_k)$, con lo que $H_k \cap E^{\complement}$ tiene medida nula y como $H := \bigcup_k H_k$ es medible, entonces $E \subseteq H$ y $H \cap E^{\complement} = \bigcup_k H_k \cap E^{\complement}$ tiene medida nula, luego $E = H \backslash (H \cap E^{\complement})$ es medible.

2.5. Invarianza

El **teorema de invarianza por traslaciones** afirma que:

1. Las σ-álgebras de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y los medibles Lebesgue $\mathcal{M}(\lambda_n)$ son invariantes por traslaciones.
   Para $\mathcal{M}(\lambda_n)$, el traslado de un rectángulo n-dimensional semiabierto es otro con el mismo volumen. Para $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, la familia de los traslados de una σ-álgebra es una σ-álgebra, y como el traslado de un abierto es un abierto, $x + \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

2. La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones.

3. Si μ es una medida definida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e invariante por traslaciones, entonces $\mu = c\lambda_n$, donde $c := \mu([0,1)^n)$.
   Si μ es invariante por traslaciones, μ y $c\lambda_n$ son iguales para los cubos diádicos y por tanto también para los abiertos. Como la familia de conjuntos donde ambas medidas coinciden es una σ-álgebra que contiene a los abiertos, también contiene a todos los elementos de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Una aplicación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una **transformación Lipschitziana** si

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|$$

Como **teorema**, toda aplicación Lipschitziana lleva conjuntos medibles a conjuntos medibles. **Demostración:** Al ser T continua, lleva compactos a compactos. Como los cerrados son uniones numerables de compactos, T lleva conjuntos F_σ a conjuntos F_σ. Como lleva intervalos $[a, b)$ a conjuntos F_σ contenidos en un diámetro menor que $c \cdot \text{diám}([a, b))$, T lleva conjuntos de medida nula a otros de medida nula. Como cada conjunto medible es unión de un F_σ y uno de medida nula, T lleva medibles a medibles.

De estos dos teoremas se deduce el **teorema para transformaciones lineales**, que afirma que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y E es medible, $\lambda_n(T(E)) = c\lambda_n(E)$, donde $c := \lambda_n(T([0,1)^n)) = |\det(T)|$.

Capítulo 3

Integración Lebesgue

3.1. Funciones medibles

Una aplicación $f : \Omega \to \Omega'$ es (Σ, Σ')**-medible** si $\forall E' \in \Sigma', f^{-1}(E') \in \Sigma$. Cuando Ω' es un espacio topológico, decimos que f es Σ**-medible** si es $(\Sigma, \mathcal{B}(\Omega'))$-medible.

Si $\Sigma' =: \sigma(\mathcal{D})$, f es (Σ, Σ')-medible si y sólo si $\forall D \in \mathcal{D}, f^{-1}(D) \in \Sigma$.

$\Longrightarrow$] Obvio.

$\Longleftarrow$] Sea $\mathcal{A} := \{E \in \Sigma' \mid f^{-1}(E) \in \Sigma\}$, vemos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{D}$, pues $f^{-1}(E^{\complement}) = \Omega \backslash f^{-1}(E)$ y $f^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(E_k)$.

Sean $T := (X, \mathcal{T})$ y $T' := (X, \mathcal{T}')$ espacios topológicos, toda función $f : T \to T'$ continua es $(\mathcal{B}(T), \mathcal{B}(T'))$-medible, pues $\mathcal{B}(T') = \sigma(\mathcal{T}')$ y la continuidad asegura que $\forall A \in \mathcal{T}', f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(T)$.

Composición de medibles:

1. Si $f : \Omega \to \Omega'$ y $g : f(\Omega) \to \Omega''$ son medibles, $g \circ f$ también lo es. En particular, si T y T' son espacios topológicos, $f : \Omega \to T$ es $(\Sigma, \mathcal{B}(T))$-medible y $g : T \to T'$ es continua, $g \circ f$ es $(\Sigma, \mathcal{B}(T'))$-medible.

   Para $E \in \Sigma''$, $g^{-1}(E) \in \Sigma'$ por ser g medible y $f^{-1}(g^{-1}(E)) = (g \circ f)^{-1}(E) \in \Sigma$ por ser g medible, luego $g \circ f$ es medible.

2. Si $u_1, \dots u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ son medibles, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(\omega) := (u_1(\omega), \dots, u_n(\omega))$ es medible.

   Un abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$ se puede expresar como unión numerable de cubos diádicos disjuntos, y como estos están en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, lo generan. Si $[a, b)$ es uno de estos cubos,

$$\varphi^{-1}([a, b)) = \bigcap_{i=1}^{n} u_i^{-1}([a_i, b_i)) \in \Sigma$$

3. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible si y sólo si lo son $\omega \mapsto \mathrm{Re}(f(\omega))$ e $\omega \mapsto \mathrm{Im}(f(\omega))$.

   $\Longrightarrow$] Se deriva de que $x \mapsto \mathrm{Re}(x)$ y $x \mapsto \mathrm{Im}(x)$ son continuas.

$\Longleftarrow$] Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ el isomorfismo canónico, como π es continua y $f(\omega) = \pi(\mathrm{Re}(f(\omega)), \mathrm{Im}(f(\omega)))$, el punto anterior nos da que f es medible.

4. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son medibles, $f+g$, fg y $\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}$ también lo son.

   Se debe a que $(x,y) \mapsto x+y$, $(x,y) \mapsto xy$ son continuas. Para el cociente, si $\{g=0\} = \emptyset$, la continuidad de $(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ cuando $y \neq 0$ implica que $\frac{f}{g}$ es medible. En el caso general, sea $S \subseteq \mathbb{C}$ medible,

$$\left(\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}\right)^{-1}(S) = \left(\left(\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}\right)^{-1}(S) \cap \{g \neq 0\}\right) \cup \left(\left(\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}\right)^{-1}(S) \cap \{g = 0\}\right)$$
$$= \left(\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}\right)^{-1}(S\backslash\{0\})) \cup \left(\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}\right)^{-1}(S \cap \{0\})$$

   El primer elemento de esta última unión no contiene elementos de $\{g=0\}$, pues para todos ellos $\frac{f}{g}\chi_{\{g\neq 0\}}(\omega) \neq 0$, por tanto el conjunto es igual a $\left(\frac{f}{g}\right)^{-1}(S\backslash\{0\})$, que es medible. El segundo elemento es $\emptyset$ si $0 \notin S$ o $\{f=0\} \cup \{g=0\}$ si $0 \in S$; en cualquier caso es medible.

5. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible, $|f|$ también lo es y existe $\alpha : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\forall \omega \in \Omega, |\alpha(\omega)| = 1$ y $|f| = \alpha f$.

   $|f|$ es medible por ser $\omega \mapsto \sqrt{\mathrm{Re}(f(\omega))^2 + \mathrm{Im}(f(\omega))^2}$, al igual que α dada por $\alpha(\omega) = \chi_{\{f=0\}} + \frac{f}{|f|}\chi_{\{f\neq 0\}}$, que cumple las condiciones.

Una función $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ es **Σ-medible** si es $(\Sigma, \Sigma' := \sigma(\{(a,+\infty]\}_{a\in\mathbb{R}}))$-medible. Todos los cubos diádicos $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ están en Σ', luego también están todos los abiertos de $\mathbb{R}$ como unión numerable de cubos diádicos y por tanto $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma'$. Adoptamos el convenio $\pm\infty \cdot 0 = 0 \cdot \pm\infty = 0$ y la notación $\{f \bullet a\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \bullet a\}$.

Sea $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$, si tenemos que

$$f \text{ es medible} \iff \forall a \in \mathbb{R}, \{f > a\} \in \Sigma \iff \forall a \in \mathbb{R}, \{f \geq a\} \in \Sigma$$
$$\iff \forall a \in \mathbb{R}, \{f < a\} \in \Sigma \iff \forall a \in \mathbb{R}, \{f \leq a\} \in \Sigma$$

$1 \implies 3]$ Como $(a,+\infty]$ es medible, $f^{-1}((a,+\infty]) = \{f > a\}$ también lo es.

$3 \implies 1]$ Para cada elemento de $\{(a,+\infty]\}_{a\in\mathbb{R}}$, $f^{-1}((a,+\infty]) = \{f > a\} \in \Sigma$, y por tanto f es medible.

$2 \implies 3]$ $\{f \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f > a - \frac{1}{k}\}$.

$3 \implies 4]$ $\{f < a\} = \Omega\backslash\{f \geq a\}$.

$4 \implies 5]$ $\{f \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f < a + \frac{1}{k}\}$.

$5 \implies 2]$ $\{f > a\} = \Omega\backslash\{f \leq a\}$.

Además, si f es medible, $\{f > -\infty\}$, $\{f < +\infty\}$, $\{f = -\infty\}$, $\{f = +\infty\}$, $\{a \leq f \leq b\}$, $\{f = a\}$, etc. son medibles, y f es medible si y sólo si $\{f = -\infty\}$ es medible y para $a \in \mathbb{R}$,$\{a < f < +\infty\}$ es medible.

$\Longrightarrow$] $\{a < f < +\infty\} = \{f > a\} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f < k\}$, $\{f = -\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\{f < -k\}$.

$\Longleftarrow$] $\{f > a\} = \{a < f < +\infty\} \cup (\{f = -\infty\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\{-k < f < +\infty\})^{\complement}$.

Dado un subconjunto denso $A \subseteq [-\infty, +\infty]$, si $\{f > a\}$ es medible para todo $a \in A$, f es medible. **Demostración:** Para $a \in \mathbb{R}$, existe una sucesión $(a_k)_k$ de elementos de A que converge a a con $a_k > a \forall k \in \mathbb{N}$, y entonces $\{f > a\} = \bigcup\{f > a_k\}$.

$f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ es medible si y sólo si para todo abierto $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(G)$ es medible.

$\Longrightarrow$] Los abiertos de $\mathbb{R}^n$ están en $\sigma(\{(a, +\infty]\}_{a\in\mathbb{R}})$.

$\Longleftarrow$] Para todo $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((a, +\infty)) = \{a < f < +\infty\}$ es medible, luego f lo es.

Una propiedad se cumple **en casi todo punto** de Ω si el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ en los que no se cumple tiene medida cero.

1. Si $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ son medibles, $\{f > g\}$ también lo es.

   Si $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}$, entonces $\{f > g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f > r_k > g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(\{f > r_k\} \cap \{g < r_k\})$.

2. Si f es medible y $g = f$ en casi todo punto, g es medible y $\mu(\{g > a\}) = \mu(\{f > a\})$.

   Si $Z := \{f \neq g\}$, $\{g > a\} \cup Z = \{f > a\} \cup Z$, luego si f es medible, $\{g > a\} \cup Z$ lo es y como difiere de $\{g > a\}$ por un conjunto de medida cero, g es medible. Por último, $\mu(\{g > a\}) = \mu(\{g > a\} \cup Z) = \mu(\{f > a\} \cup Z) = \mu(\{f > a\})$.

3. Si f es medible y $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda$ y λf son medibles.

   Para $a \in \mathbb{R}$, $\{f + \lambda > a\} = \{f > a - \lambda\}$ y

$$\{\lambda f > a\} = \begin{cases} f > \frac{a}{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \\ f < \frac{a}{\lambda} & \text{si } \lambda < 0 \\ \Omega & \text{si } \lambda = 0 \wedge a < 0 \\ \emptyset & \text{si } \lambda = 0 \wedge a \geq 0 \end{cases}$$

4. Si f y g son medibles, también lo es $f + g$. Esto significa que las combinaciones lineales $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ de funciones medibles $f_1, \ldots, f_n$ son medibles, por lo que el conjunto de funciones $\Omega \to [-\infty, +\infty]$ Σ-medibles es un espacio vectorial.

   Para $a \in \mathbb{R}$, si g es medible, también lo es $a - g$, y entonces $\{f + g > a\} = \{f > a - g\}$.

5. Para $f, g : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ medibles, fg es medible y, si $g \neq 0$ en casi todo punto, f/g (definida en casi todo punto) es medible.

   Si f es medible, es fácil ver que $f^2 = |f|^2$ también lo es. Para valores finitos, $fg = \frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$. Si alguna de las funciones puede tener valores infinitos, vemos que $\{f = +\infty\}$, $\{f = -\infty\}$, $\{f = 0\}$, $\{g = +\infty\}$, etc. son medibles y por tanto $\{fg = 0\} = \{f = 0\} \cup \{g = 0\}$, $\{fg = +\infty\}$ y $\{fg = -\infty\}$ también lo son. Para f/g, basta ver que $1/g$ es medible, pero dado $a \in \mathbb{R}$,

$$\{1/g > a\} = \begin{cases} \{0 < g < \frac{1}{a}\} & \text{si } a > 0 \\ \{0 < g < +\infty\} & \text{si } a = 0 \\ \{g < \frac{1}{a}\} \cup \{0 < g < +\infty\} & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

6. Dada una sucesión de funciones medibles $(f_k : \Omega \to \mathbb{R})_k$, las funciones $\sup_k f_k(\omega)$, $\inf_k f_k(\omega)$, $\limsup_k f_k(\omega)$ y $\liminf_k f_k(\omega)$ son medibles. De aquí que, si E es el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ en los que $(f_n(\omega))_n$ converge, entonces el límite puntual de $(f_n|_E)_n$ es medible y E también lo es.

   Basta probarlo para el supremo, pues $\inf_k f_k(x) = -\sup_k(-f_k)$, $\limsup_n f_n(\omega) = \inf_{m\in\mathbb{N}}\{\sup_{k\geq m}\{f_k(\omega)\}\}$ y $\liminf_n f_n(\omega) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\{\inf_{k\geq m}\{f_k(\omega)\}\}$, pero $\{\sup_k f_k > a\} = \bigcup_k\{f_k > a\}$.

3.2. Funciones simples

Una **función simple** es aquella cuya imagen es finita. Si $f : \Omega \to \Omega'$ es una función simple que toma valores distintos $a_1, \ldots, a_n$ en conjuntos disjuntos respectivos $E_1, \ldots, E_n$, su **forma canónica** es

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

Claramente χ_E es medible si y sólo si E lo es, por lo que f es medible si y sólo si lo son $E_1, \ldots, E_n$. Algunos autores sólo llaman funciones simples a las que además son medibles. Como **teorema**:

1. Toda función $f : \Omega \to [0, +\infty]$ es límite de una sucesión creciente de funciones simples.

   Para $k \in \mathbb{N}$, subdividimos $[0, k]$ en subintervalos $\{[(j-1)2^{-k}, j2^{-k}]\}_{j\in\{1,\ldots,k2^k\}}$ y definimos

   $$f_k(x) := \begin{cases} \frac{j-1}{2^k} & \text{si } \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}, j \in \{1, \ldots, k2^k\} \\ k & \text{si } f(x) \geq k \end{cases}$$

   Cada f_k es una función simple definida en todo Ω, $f_k \leq f_{k+1}$ porque al pasar de f_k a f_{k+1} dividimos los intervalos por la mitad y permitimos valores mayores en la imagen, y $f_k \to f$ porque para un valor k lo suficientemente grande, $0 \leq f(x) - f_k(x) \leq 2^{-k}$ si $f(x)$ es finito y $f_k = k \to +\infty$ si $f(x) = +\infty$.

2. Toda función $f : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ es límite de una sucesión de funciones simples.

   Basta aplicar lo anterior a $f^+ := \text{máx}\{0, f\}$ y $f^- := -\text{mín}\{0, f\}$ y restar las sucesiones resultantes.

3. Si la función f en los dos apartados anteriores es medible, podemos hacer que las f_k también lo sean.

   En el primer apartado,

   $$f_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{\{\frac{j-1}{2^k} \leq f < \frac{j}{2^k}\}} + k\chi_{\{f\geq k\}}$$

   que es medible porque todos los conjuntos involucrados lo son, y en el segundo basta considerar f^+ y f^-.

Si f es acotada, las funciones simples dadas convergerán uniformemente a f.

3.3. Integrales en funciones positivas

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $\mathcal{S}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones simples $\Omega \to [-\infty, +\infty]$ y $\mathcal{S}(\Omega)^+ := \{h \in \mathcal{S}(\Omega) \mid h \geq 0\}$, llamamos **integral** de una función simple $h := \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k} \in \mathcal{S}(\Omega)^+$ como

$$\int h \, d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E_k)$$

Si $f, g \in \mathcal{S}(\Omega)^+$:

1. Si $\alpha \in [0, +\infty)$, $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
   Supongamos $f =: \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ y $g =: \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}$. Entonces $\alpha f = \sum_{i=1}^n \alpha a_i \chi_{A_i}$ y
   $$\int \alpha f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha a_i \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \alpha \int f \, d\mu$$
2. $\int (f+g) d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
   Sean $C := \{c_1, \ldots, c_r\} = \{a_i + b_j\}_{i \in \{1,\ldots,n\}, j \in \{1,\ldots,m\}}$, y $C_k := \bigcup_{a_i + b_j = c_k} (A_i \cap B_j)$ para cada c_k, tenemos $f + g = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{C_k}$. Entonces
   $$\int f + g \, d\mu = \sum_{k=1}^r c_k \mu(C_k) = \sum_{k=1}^r c_k \mu(C_k) = \sum_{k=1}^r c_k \left(\sum_{a_i + b_j = c_k} \mu(A_i \cap B_j) \right) =$$
   $$= \sum_{k=1}^r \sum_{a_i + b_j = c_k} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ((a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) =$$
   $$= \sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) \right) + \sum_{j=1}^m b_j \left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m b_i \mu(B_j)$$
3. Si $f \leq g$ entonces $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
   $$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int (g - f) d\mu \geq \int f \, d\mu$$
4. $\nu : \Sigma \to [0, +\infty]$ dada por $\nu(E) := \int f \chi_E d\mu$ es una medida finita.
   $\nu(E) = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E)$, y como las aplicaciones $\nu_i(E) = \mu(E \cap A_i)$ son medidas, ν también lo es.

Para $f : \Omega \to [0, +\infty]$ medible, se define

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int s \, d\mu \mid s \in \mathcal{S}(\Omega) \wedge 0 \leq s \leq f \right\}$$

Esta definición es compatible con la dada inicialmente para funciones simples. Para $E \in \Sigma$, se define

$$\int_E f \, d\mu := \int \chi_E f \, d\mu$$

Para $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ medibles y $A, B \in \Sigma$:

1. $f \leq g \implies \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.
2. $A \subseteq B \implies \int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$.
3. $\forall \alpha \in [0, +\infty), \int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu$.
4. $f|_A = 0 \implies \int_A f\, d\mu = 0$.
5. $\mu(A) = 0 \implies \int_A f\, d\mu = 0$.

La **desigualdad de Tchevichev** afirma que si $f : \Omega \to [0, +\infty]$ es medible y $E \in \Sigma$:

1. Si para $t > 0$ definimos $E_t \coloneqq E \cap \{f > t\}$, entonces
$$t\mu(E_t) \leq \int_{E_t} f\, d\mu \leq \int f\, d\mu$$
Se obtiene de integrar en $t\chi_{E_t} \leq f\chi_{E_t} \leq f$.
2. Si $\int_E f\, d\mu = 0$ entonces $f(\omega) = 0$ para casi todo $\omega \in E$.
Por lo anterior, $\forall k \in \mathbb{N}, \mu(E_{\frac{1}{k}}) = 0$, y como $\{f \neq 0\} = \bigcup_k E_{\frac{1}{k}}$, este conjunto también tiene medida nula.
3. Si $\int_E f\, d\mu < +\infty$ entonces $f(\omega) < +\infty$ para casi todo $\omega \in E$.
$\mu(E_k) \leq \frac{1}{k} \int f\, d\mu$, luego $\mu(\{f = +\infty\}) = \mu\left(\bigcap_k E_k\right) = \lim_n \mu(E_k) = 0$.
4. Si $\int_E f\, d\mu < +\infty$ entonces $\{f > 0\}$ es σ-finito.
$\{f > 0\} = \bigcup_k E_{\frac{1}{k}}$ y cada $E_{\frac{1}{k}}$ tiene medida finita.

El **teorema de convergencia monótona de Lebesgue** afirma que si $(f_n : \Omega \to [0, +\infty])_n$ es una sucesión creciente de funciones medibles que converge puntualmente a $f : \Omega \to [0, +\infty]$, entonces
$$\int f\, d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$$

Demostración: Sea $\alpha \coloneqq \sup \int f_n d\mu \in [0, +\infty]$, como $f_n \leq f \forall n$ y f es medible por ser límite puntual de medibles, $\alpha \leq \int f$. Sea $s \leq f$ una función simple, al ser f_n creciente y convergente a f, se tiene que $(E_n \coloneqq \{f_n \geq s\})_n$ es creciente con $\bigcup_n E_n = \Omega$. Tenemos que $\int f_n d\mu \geq \int \chi_{E_n} f_n d\mu \geq \int \chi_{E_n} s\, d\mu$. Tomando límites aquí, vemos que $\alpha \geq \int \chi_\Omega s\, d\mu = \int s\, d\mu$, y tomando supremos entre las funciones simples $s \leq f$, $\alpha \geq \int f\, d\mu$.

Usando esto podemos probar para $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ que $\int (f + g) d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$, partiendo de la propiedad correspondiente para funciones simples.

El **teorema de Beppo-Levi** afirma que la suma de una sucesión de funciones medibles $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ es medible y
$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

Demostración: $(F_n := \sum_{k=1}^n f_k)_n$ es una sucesión de funciones medibles, por lo que basta tomar límites en $\int F_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int f_k d\mu$.

Una función $\Omega \to [0, +\infty]$ medible es **integrable** si su integral es finita. Por ejemplo, si $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mu(E) = |E| \forall E \in \Sigma$, una función f medible positiva es integrable si y sólo si $\int f\, d\mu = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) < +\infty$, y si además $\Omega = \mathbb{N}$, la sucesión f es integrable si y sólo si la serie $\sum_n f(n)$ converge, y la integral coincide con la suma. En tal caso, el teorema de Beppo-Levi nos dice que si $a_{n,m}$ es una sucesión doble de números positivos, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$$

El **lema de Fatou** afirma que si $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ es una sucesión de funciones medibles, su límite inferior $f(\omega) := \lim\inf_n f_n(\omega)$ es medible y $\int f\, d\mu \leq \lim\inf_n \int f_n d\mu$. **Demostración:** $(g_n := \inf_{m \geq n}\{f_m(x)\})_n$ define una sucesión creciente de funciones medibles convergente hacia f, y por la monotonía de la integral y el teorema de convergencia monótona,

$$\int f\, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int g_n d\mu \right\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{m \geq n} \left\{ \int f_m d\mu \right\} \right\} = \lim_n \inf \int f_n d\mu$$

Como **teorema**, si $g : \Omega \to [0, +\infty]$ es medible, entonces $\nu : \Sigma \to [0, +\infty]$ dada por $\nu(E) := \int_E g\, d\mu$ es una medida y para $f : \Omega \to [0, +\infty]$,

$$\int f\, d\nu = \int fg\, d\mu$$

Demostración: $\nu(\emptyset) = 0$ y, dada una sucesión $(A_n)_n$ de medibles disjuntos, $g\chi_{\bigcup_n A_n} = \sum_n g\chi_{A_n}$ y el teorema de Beppo-Levi nos da que $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$ y por tanto ν es una medida. Sea $s := \sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i} \in \mathcal{S}(\Omega)^+$,

$$\int s\, d\nu = \sum_{i=1}^m a_i \int \chi_{E_i} g\, d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^m a_i \chi_{E_i} \right) g\, d\mu = \int sg\, d\mu$$

Usando el teorema de la convergencia monótona para tomar límites en una sucesión creciente de funciones simples que converge a f se completa la prueba.

3.4. Funciones integrables

Una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es integrable si $\int |f| d\mu < +\infty$, si y sólo si $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}, f^- = \text{mín}\{f, 0\} : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ son integrables, y definimos

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

Si solo una de entre f^+ y f^- es integrable, usamos esta misma definición y entonces $\int f\, d\mu \in [-\infty, +\infty]$. Una función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es integrable si $\int |f| d\mu < +\infty$. Si $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ son tales que $f = u + iv$, es claro que f es integrable si y sólo si u y v lo son, y definimos

$$\int f\, d\mu := \int u\, d\mu + i \int v\, d\mu$$

Llamamos $\mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ al conjunto de funciones integrables $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Cuando basta indicar uno de los componentes de la terna y se sobreentiende el resto, podemos escribir $\mathcal{L}^1(\Omega)$, $\mathcal{L}^1(\Sigma)$ o $\mathcal{L}^1(\mu)$. El subconjunto de $\mathcal{L}^1$ formado por las funciones reales se denota $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, y por definición $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Propiedades:

1. $\mathcal{L}^1(\mu)$ es un espacio vectorial complejo y, si lo consideramos como un espacio vectorial real por el isomorfismo canónico entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}$ es un subespacio suyo.
   Sean $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha f + g$ es medible y $|\alpha f + g| \leq |\alpha||f| + |g|$, e integrando y aplicando las propiedades de la integral en funciones positivas, $\int |\alpha f + g| d\mu \leq \int (|\alpha||f| + |g|) d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < +\infty$,

2. La aplicación $\nu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}$ dada por $\nu(f) := \int f \, d\mu$ es lineal.
   Sean $u, v \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

   a) $i \int (u + iv) d\mu = i \int u d\mu + i^2 \int v \, d\mu = \int (-v + iu) d\mu = \int i(u + iv) d\mu$.

   b) $h := u + v \implies h^+ - h^- = u^+ - u^- + v^+ - v^- \implies h^+ + (u^- + v^-) = (u^+ + v^+) + h^- \implies \int h^+ d\mu + \int u^- d\mu + \int v^- d\mu = \int u^+ d\mu + \int v^+ d\mu + \int h^- d\mu \implies \int h \, d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int u^+ d\mu - \int u^- d\mu + \int v^+ d\mu - \int v^- d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu$.

   c) $\alpha \geq 0 \implies (\alpha u)^+ = \alpha u^+ \wedge (\alpha u)^- = \alpha u^- \implies \int \alpha u \, d\mu = \int \alpha u^+ d\mu - \int \alpha u^- d\mu = \alpha \left(\int u^+ d\mu - \int u^- d\mu \right) = \alpha \int u \, d\mu$.

   d) $\alpha < 0 \implies (\alpha u)^+ = (-\alpha) u^- \wedge (\alpha u)^- = (-\alpha) u^+ \implies \int \alpha u \, d\mu = \int (-\alpha) u^- d\mu - \int (-\alpha) u^+ d\mu = (-\alpha) \left(\int u^- d\mu - \int u^+ d\mu \right) = \alpha \int u \, d\mu$.

3. Desigualdad triangular:
   $$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu), \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$
   Si $\left| \int f \, d\mu \right| = 0$ es trivial. Si $\left| \int f \, d\mu \right| \neq 0$, sea $a := \frac{\int f \, d\mu}{|\int f \, d\mu|}$ y como $\forall z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Re}(af)| \leq |af| = |f|$; de aquí que $\left| \int f \, d\mu \right| = a \int f \, d\mu = \mathrm{Re}\left(\int af \, d\mu \right) = \int \mathrm{Re}(af) d\mu \leq \int |f| d\mu$.

Una función medible $f : E \to \mathbb{C}$ definida en $E \in \Sigma$ es **integrable sobre** E si la **extensión canónica** $\tilde{f} := f\chi_E$ es integrable, y entonces se define $\int_E f \, d\mu := \int \tilde{f} \, d\mu$. Con esto:

1. Si $f : E \to \mathbb{C}$ es una función medible definida en $E \in \Sigma$, f es integrable sobre E y $\forall A \in \Sigma \cap \mathcal{P}(E), \int_A f \, d\mu = 0$ si y sólo si f se anula en casi todo $\omega \in E$.

   $\implies$] En particular, $\int (\mathrm{Re}(f))^+ d\mu = \mathrm{Re}\left(\int_{\{\mathrm{Re}(f) \geq 0\}} f \, d\mu \right) = 0$, y por la desigualdad de Tchevichev, $\mu\{\mathrm{Re}(f)^+ > t\} \leq \frac{1}{t} \int (\mathrm{Re}(f))^+ d\mu = 0$ para todo $t > 0$, por lo que $\mathrm{Re}(f)^+$ se anula en casi todo punto. Lo mismo sucede con $(\mathrm{Re}(f))^-$, $(\mathrm{Im}(f))^+$ e $(\mathrm{Im}(f))^-$. Por tanto f se anula en casi todo punto.

   $\impliedby$] Para $A \in \Sigma \cap \mathcal{P}(E)$, $(\mathrm{Re}(f))^+$, $(\mathrm{Re}(f))^-$, $(\mathrm{Im}(f))^+$ e $(\mathrm{Im}(f))^-$ se anulan en casi todo $\omega \in A \subseteq E$, por lo que $\mathrm{Re}\left(\int f \, d\mu \right) = \int \mathrm{Re}(f) d\mu = \int (\mathrm{Re}(f))^+ d\mu - \int (\mathrm{Re}(f))^- d\mu = 0 - 0 = 0$ y, análogamente, $\mathrm{Im}\left(\int f \, d\mu \right) = 0$.

2. Si $f, g : E \to \mathbb{C}$ son medibles iguales en casi todo punto y f es integrable sobre E entonces g también lo es y $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$.
   Basta aplicar el punto anterior a $f - g$.

El **teorema de la convergencia dominada** afirma que, dada una sucesión $(f_n : \Omega \to \mathbb{C})_n$ de funciones que converge en casi todo punto, si existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ integrable con $|f_n| \leq g \forall n \in \mathbb{N}$, entonces la función límite $f(\omega) := \lim_n f_n(\omega)$, definida en casi todo punto, es integrable,

$$\lim_n \int |f_n - f| d\mu = 0$$

y, en particular,

$$\lim_n \int f_n d\mu = \int f \, d\mu$$

Demostración: Las f_n son integrables al estar acotadas por una función integrable. Tenemos que $|f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2g$ y, teniendo en cuenta que $\limsup_n |f - f_n| = 0$ y aplicando el lema de Fatou a la sucesión de medibles positivas $2g - |f - f_n|$, queda que $\int 2g \, d\mu = \int \liminf_n (2g - |f - f_n|) d\mu \leq \liminf_n \int (2g - |f - f_n|) d\mu = \int 2g \, d\mu - \limsup_n \int |f - f_n|$. Restando la cantidad finita $\int 2g \, d\mu$ a ambos miembros de la desigualdad, $0 \leq -\limsup_n \int |f - f_n| \leq 0$, con lo que $\lim_n \int |f - f_n| = 0$ y f es integrable porque $|f| \leq |f_n| + |f - f_n|$.

Como **teorema**, dada una sucesión de funciones integrables $(f_n : \Omega \to \mathbb{C})_n$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ converge absolutamente en casi todo punto y su suma es integrable con $\int (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$. **Demostración:** Por el teorema de la convergencia monótona, $G := \sum_n |f_n|$ converge en casi todo punto y es integrable, y $S := \sum_n f_n$ también, y como para $(g_m := \sum_{n=0}^{m} f_n)_m$ se tiene $|g_m| \leq G$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener el resultado.

3.5. Relación entre las integrales de Riemann y Lebesgue

Como **teorema**, las funciones integrables Riemann son integrables respecto a la medida de Lebesgue y las integrales coinciden. **Demostración:** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable Riemann, y por tanto acotada, existe una sucesión $(P_k)_k$ de particiones en $[a, b]$ con $\|P_n\| \to 0$ y $\int_{[a,b]} f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_k s(f, P_k)$, y si $\{N_{k1}, \ldots, N_{km_k}\}$ es el conjunto de subrectángulos de P_k, la sucesión $(s_k)_k$ de funciones simples $s_k(t) := \sum_{i=1}^{m_k} \chi_{N_{ki}} \inf_{x \in N_{ki}} \{f(x)\}$ está acotada por la función constante $M := \chi_{[a,b]} \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\}$ y converge a f en todos sus puntos de continuidad y por tanto en casi todo punto. Entonces, por el teorema de la convergencia dominada, f es integrable Lebesgue en $[a, b]$ y $\int_{[a,b]} f \, d\lambda_n = \int_{[a,b]} f(\vec{x}) d\vec{x}$.

Una función $f : S \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo n-dimensional $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice **localmente integrable Riemann** si es integrable Riemann sobre cada intervalo compacto $I \subseteq S$. Definimos entonces la **integral impropia** de f en S como

$$\int_S f(x) dx := \lim_{I \nearrow S} \int_I f(x) dx$$

y si existe, decimos que **converge**. La integral impropia $\int_S f(x) dx$ es **absolutamente convergente** si $\int_S |f(x)| dx$ es convergente.

Para $f : S \to \mathbb{R}$ localmente integrable Riemann sobre un intervalo n-dimensional $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\int_S f(x) dx$ es absolutamente convergente si y sólo si f es integrable Lebesgue sobre S y $\int_S f \, d\lambda_n = \int_S f(x) dx$.

$\Longrightarrow$] f es integrable Riemann, y por tanto Lebesgue, sobre todo intervalo compacto $I \subseteq S$, y dada una sucesión $(I_k)_k$ de intervalos compactos en S que tiende a S, $(f_k := \chi_{I_k} f)$ es una sucesión de funciones que tiende a f tal que $|f_k| < |f| \forall k \in \mathbb{N}$, y por la convergencia dominada tenemos que $\int_S f\, d\lambda_n = \lim_k \int f_k d\lambda_n = \lim_k \int_{I_k} f\, dx = \int_S f(x)dx$.

$\Longleftarrow$] Si f es integrable Riemann en un intervalo compacto $I \subseteq S$, también es acotada en ese intervalo y por tanto f^+ y f^- también lo son. Si además f es integrable Lebesgue sobre S, por la convergencia monótona tenemos que si $(I_k)_k$ es una sucesión creciente de intervalos compactos que tiende a S, $\int_S f^+(x)dx = \lim_{I \nearrow S} \int_I f^+(x)dx = \lim_k \int_{I_k} f^+(x)dx = \lim_k \int_{I_k} f^+(x)d\lambda_n = \int \lim_k \chi_{I_k} f^+(x)d\lambda_n = \int_S f^+(x)d\lambda_n < +\infty$, y análogamente $\int_S f^-(x)dx < +\infty$, por lo que $\int_S |f(x)|dx = \int_S f^+(x)dx + \int_S f^-(x)dx < +\infty$.

Llamamos **soporte** de una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ a $\operatorname{sop}(g) := \overline{\{g \neq 0\}}$, y $\mathcal{C}_0(\Omega)$ al conjunto de funciones continuas $g : \Omega \to \mathbb{C}$ con soporte compacto. Como **teorema**, $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. **Demostración:** Como las funciones simples medibles son densas en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, basta ver que la función característica de cualquier conjunto medible Lebesgue es límite de una sucesión de funciones en $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Para ello, dado un medible E y $\varepsilon > 0$, existen K compacto y A abierto con $K \subseteq E \subseteq A$ y $\lambda(A \backslash K) < \frac{\varepsilon}{2}$, y si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ cumple que $K \subseteq \operatorname{sop}(f) \subseteq A$ y $\chi_K \leq f \leq 1$, entonces $\|f - \chi_E\|_\infty \leq 2\chi_{A \backslash K}$ y $\|f - \chi_E\|_\infty \leq 2\lambda(A \backslash K) < \varepsilon$. Para ver que existe f, fijado un cerrado $F \subseteq \mathbb{R}^n$, $d(x, F)$ es continua, y como $\delta := \min\{d(x, K) \mid x \notin A\} > 0$, $A_0 := \{x \mid d(x, K) < \frac{\delta}{2}\}$ es un abierto acotado con $K \subseteq A_0 \subseteq \overline{A_0} \subseteq A$. Tomando $F_0 := \mathbb{R}^n \backslash A_0 = \{x \mid d(x, K) \geq \frac{\delta}{2}\}$, podemos definir $f_0(y) := \frac{d(y, F_0)}{1 + d(y, F_0)}$, que cumple $0 \leq f_0 \leq 1$, $f_0(x) = 0 \forall x \in F_0 \supseteq \mathbb{R}^n \backslash A$ y, como para $y \in K$, $d(y, F_0) \geq \frac{\delta}{2}$, $f_0(y) \geq k_0 := \frac{\frac{\delta}{2}}{1 + \frac{\delta}{2}}$ y la función continua $f(x) := \min\{1, \frac{f_0(x)}{k_0}\}$ tiene soporte compacto en $\overline{A_0} \subseteq A$ y $\chi_K \leq f \leq 1$.

3.6. Integrales dependientes de un parámetro

Como **teorema** sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, (X, d) un espacio métrico y $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función tal que:

1. Para casi todo $\omega \in \Omega$ $f^\omega(x) := f(x, \omega)$ es continua.
2. Para todo $x \in X$ $f_x(\omega) := f(x, \omega)$ es medible.
3. Existe $g : \Omega \to [0, +\infty)$ tal que para todo $x \in X$, para casi todo $\omega \in \Omega$, $|f(x, \omega)| \leq g(\omega)$.

Entonces para todo $x \in X$ f_x es integrable y $F(x) := \int f(x, \omega)d\mu(\omega)$ es continua.

Demostración: Como (X, d) es un espacio métrico, la continuidad de las funciones en X se puede caracterizar mediante sucesiones, por lo que basta tomar una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de X que converge a un cierto x arbitrario y probar que

$$\left(F(x_n) = \int f(x_n, \omega)d\mu(\omega)\right)_n$$

converge a $F(x)$. Sea $N \in \Sigma$ de medida cero tal que f^ω es continua para $\omega \notin N$ y por tanto $f^\omega(x_n) = f(x_n, \omega) \to f(x, \omega)$. Podemos tomar una sucesión $(A_n)_n$ de conjuntos de medida nula tales que para $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \notin A_n$, $|f(x_n, \omega)| \leq g(\omega)$. Entonces $N \cup \bigcup_n A_n$ tiene medida nula

y fuera de él, como la sucesión $(f_{x_n})_n$ converge puntualmente y $|f_{x_n}| \leq g \forall n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y

$$\lim_n F(x_n) = \lim_n \int f(x_n, \omega) d\mu(\omega) = \int \lim_n f(x_n, \omega) d\mu(\omega) = \int f(x, \omega) d\mu(\omega) = F(x)$$

Otro **teorema** nos dice que si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ cumple que:

1. Para casi todo $\omega \in \Omega$ $f^\omega(x) := f(x, \omega)$ es derivable ($\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega)$).
2. Para todo $x \in I$ $f_x(\omega) := f(x, \omega)$ es medible, siendo integrable para algún $x_0 \in I$.
3. Existe $g : \Omega \to [0, +\infty)$ integrable tal que para casi todo $\omega \in \Omega$ para todo $x \in I$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega)\right| \leq g(\omega)$.

Entonces para todo $x \in I$, f_x es integrable, $F(x) := \int f(x, \omega) d\mu(\omega)$ es derivable y $F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) d\mu(\omega)$.

Demostración: Sea $A \in \Sigma$ de medida nula tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s, \omega)\right| \leq g(\omega)$$

para $\omega \notin A$ para todo $s \in I$, por el teorema del incremento finito, si $\omega \notin A$,

$$|f(x, \omega) - f(x_0, \omega)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_{x,\omega}, \omega)(x - x_0)\right| \leq g(\omega)|x - x_0|$$

Entonces f_x se diferencia de f_{x_0} en un múltiplo de una función integrable g, por lo que también es integrable. Para ver que la integral es derivable, basta tomar una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de X que converge a un cierto x arbitrario y probar que existe $\lim_n \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x}$. Sea $N \in \Sigma$ de medida nula tal que para $\omega \notin N$, f^ω es derivable y por tanto

$$\frac{f(x_n, \omega) - f(x, \omega)}{x_n - x} \to \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega)$$

Entonces $N \cup A$ tiene medida nula y fuera de él, la sucesión

$$\left(h_{n,\omega} := \frac{f(x_n, \omega) - f(x, \omega)}{x_n - x}\right)_n$$

cumple que

$$|h_{n,\omega}| = \left|\frac{f(x_n, \omega) - f(x, \omega)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} f(\eta_{x,x_n,\omega}, \omega)\right| \leq g(\omega)$$

y, como además converge puntualmente, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_n \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \lim_n \frac{\int f(x_n, \omega) d\mu(\omega) - \int f(x_n, \omega) d\mu(\omega)}{x_n - x} \\
&= \lim_n \int \frac{f(x_n, \omega) - f(x, \omega)}{x_n - x} d\mu(\omega) = \int \left(\lim_n \frac{f(x_n, \omega) - f(x, \omega)}{x_n - x}\right) d\mu(\omega) \\
&= \int \frac{\partial f}{\partial x}(x, \omega) d\mu(\omega)
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Cambio de variable

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, (Ω', Σ') un espacio medible y $g : \Omega \to \Omega'$ medible, llamamos **medida imagen** de μ a través de g a la medida $\nu := \mu g^{-1} : \Sigma' \to [0, +\infty]$ dada por $\nu(A) := \mu(g^{-1}(A))$.

Una función Σ'-medible $f : \Omega' \to \mathbb{C}$ es ν-integrable si y sólo si $f \circ g$ es μ-integrable, y si f es ν-integrable o $f \geq 0$ se tiene

$$\int f \, d\nu = \int f \circ g \, d\mu$$

Demostración: Para $A \in \Sigma'$ y $x \in \Omega$, $\chi_{g^{-1}(A)}(x) = \chi_A(g(x)) = (\chi_A \circ g)(x)$, luego $\chi_{g^{-1}(A)} = \chi_A \circ g$ y $\int_{\Omega'} \chi_A d\nu = \nu(A) = \mu(g^{-1}(A)) = \int_\Omega \chi_{g^{-1}(A)} d\mu = \int_\Omega (\chi_A \circ g) d\mu$. Con esto, una función simple $f : \Sigma' \to [0, +\infty]$ es ν-integrable si y sólo si $f \circ g$ es μ-integrable, y entonces $\int f \, d\nu = \int f \circ g \, d\mu$. Usando el teorema de la convergencia monótona podemos extender este resultado a funciones medibles positivas, y el de la convergencia dominada nos da el resultado para el caso general.

Dada una función $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha, llamamos **medida de Lebesgue-Stieltjes** asociada a α o **medida de Borel inducida** a la única medida de Borel con $\mu_\alpha((a, b]) = \alpha(b) - \alpha(a)$, y que se construye de forma similar a la de Lebesgue.

Como **teorema**, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada y $D(f) := \{x \in [a, b] \mid f \text{ es discontinua en } x\}$, entonces f es integrable Riemann-Stieltjes con respecto a α en $[a, b]$ si y sólo si $\mu_\alpha(D(f)) = 0$, y en tal caso f es μ_α-integrable y $\int_{[a,b]} f \, d\mu_\alpha = \int_a^b f \, d\alpha$. La demostración de esto es similar a la correspondiente para integrales de Riemann simples.

Dado un espacio de medida (Ω, Σ, μ) finito, llamamos **variables aleatorias** a las funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$, y tenemos que μf^{-1} es una medida finita en $\mathbb{R}$ tal que $f = f \circ id$ es μ-integrable si y sólo si id es μf^{-1}-integrable, y entonces $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\mathbb{R} id \, d\mu f^{-1}$.

Llamamos **función de distribución** de f a $F(x) := \mu(\{f \leq x\})$ o a $\varphi(x) := \mu(\{f > x\}) = \mu(\Omega) - F(x)$. Sea $f : \Omega \to (a, b]$ una variable aleatoria, $F(x) := \mu(\{f \leq x\})$ y $\varphi(x) := \mu(\{f > x\})$, entonces f es integrable y

$$\int f \, d\mu = \int_{[a,b]} id \, d\mu f^{-1} = \int_a^b id \, dF = -\int_a^b id \, d\varphi$$

Demostración: La identidad es continua y por tanto integrable Riemann-Stieltjes respecto a F o φ, y como $F(y) - F(x) = -(\varphi(y) - \varphi(x))$, se tiene $\int_a^b id\, dF = -\int_a^b id\, d\varphi$, pero entonces id es μf^{-1}-integrable.

Si f no es acotada, podemos aplicar este resultado a los conjuntos $E_{a,b} := \{a < f \leq b\}$ para $a < b$ cualesquiera definiendo $\mu_{a,b}(E) := \mu(E \cap E_{a,b})$ y usando esta medida.

La restricción de que f sea acotada se puede suprimir definiendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} id\, d\varphi := \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b id\, d\varphi$$

cuando el límite existe. En tal caso se cumple

$$\int_\Omega f^+ d\mu = \lim_{b \to +\infty} \int_{E_{0,b}} f\, d\mu < +\infty \quad \text{y} \quad \int_\Omega f^- d\mu = -\lim_{a \to -\infty} \int_{E_{a,0}} f\, d\mu < +\infty$$

por lo que f es μ-integrable.

De aquí que, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ si y sólo si $\int_{-\infty}^{+\infty} id\, d\varphi$ es finita, y en tal caso $\int_\Omega f\, d\mu = -\int_{-\infty}^{+\infty} id\, d\varphi$. Entonces:

1. Si $f : \Omega \to [a, b]$ es medible con $\varphi(x) := \mu(\{f > x\})$ y $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\phi \circ f$ es integrable y
$$\int_\Omega \phi \circ f\, d\mu = -\int_a^b \phi\, d\varphi$$
2. Si es $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, entonces
$$\int_\Omega \phi \circ f\, d\mu = -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\, d\varphi$$
3. Si es $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\phi \circ f$ es integrable, esta igualdad también se cumple.

Llamamos $\mathcal{L}_\phi(\mu)$ al conjunto de funciones medibles f tales que $\phi \circ f$ es integrable, y para $\phi(x) = |x|^p$, escribimos $\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}_\phi(\mu)$. Esto es compatible con la definición inicial de $\mathcal{L}^1(\mu)$.