Optimización Lineal

DRAFT

DRAFT

Copyright © 2019 Juan Marín Noguera, juan.marinn@um.es.

Esta obra es libre: puedes distribuirla y/o modificarla bajo los términos de la licencia Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0. Para ver una copia de esta licencia, visita https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/legalcode. Esta obra viene sin ninguna garantía, al máximo alcance permitido por la legislación aplicable.

Gracias por comprar este ejemplar. Al hacerlo estás ayudando a los refugiados de Atenas, pues los beneficios se destinan íntegramente a Project Elea, un grupo de voluntarios que trabajan con los residentes del campo de refugiados de Eleonas para mejorar los estándares de vida y el bienestar comunitario dentro de este. Ver https://projectelea.org/about-us/ para más información.

En el muy improbable caso de que el proyecto deje de recibir donaciones antes de enviar el dinero, este se destinaría a otra ONG.

Capítulo 1

Modelos de optimización lineal

Un **problema de optimización** consiste en minimizar o maximizar una función $f : F \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde F es el **conjunto factible**. Un **poliedro** es una intersección finita de semiespacios de $\mathbb{R}^n$, y decimos que un problema de optimización es **lineal** si f es lineal y F es un poliedro.

1.1. Forma canónica

Todo problema de optimización lineal es reducible a minimizar una función

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$$

bajo una serie de requisitos de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \geq b_i$$

con $i \in \{1, \ldots, m\}$. Definiendo en $\mathbb{R}^n$ el orden parcial dado por

$$(x_1, \ldots, x_n) \leq (y_1, \ldots, y_n) :\iff \forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k \leq y_k,$$

podemos representar el conjunto factible como $\{X : AX \leq B\}$, con $A := (a_{ij})_{m \times n}$, $X \in \mathbb{R}^n$ y $B := (b_i)_i \in \mathbb{R}^m$, y el problema queda representado por A, B y $C := (c_k)_k \in \mathbb{R}^n$. También usamos la notación

$$(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n) :\iff \forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k < y_k,$$

con lo que $x < y \not\equiv x \leq y \wedge x \neq y$.

Para convertir a forma canónica, tenemos en cuenta que:

- $\operatorname{máx}\{f(x)\}_{x \in F} = -\operatorname{mín}\{-f(x)\}_{x \in F}$; $\operatorname{mín}\{f(x)\}_{x \in F} = -\operatorname{máx}\{-f(x)\}_{x \in F}$.
- $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b \iff -a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n \geq -b$.
- $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b \iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geq b \wedge a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b$.

DRAFT

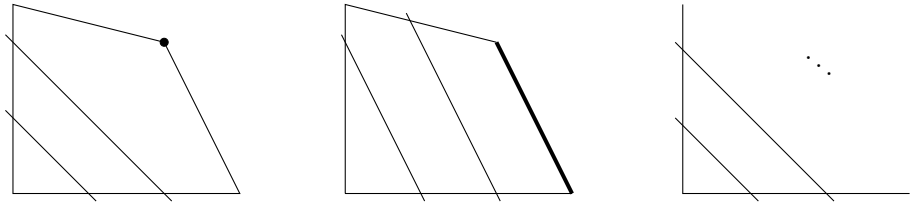

Figura 1.1: De izquierda a derecha, uso del método gráfico en problemas con solución únca, múltiple e ilimitada. Se representan el poliedro, las rectas de valor constante y las soluciones.

1.2. Forma estándar

Los requisitos son de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i,\ i \in \{1,\dots,m\} \quad \text{ó} \quad x_k \geq 0,\ k \in \{1,\dots,n\}.$$

El conjunto factible queda representado por $\{X : AX = B, \forall k \in S, X_k \geq 0\}$, donde $S \subseteq \{1,\dots,n\}$. Para convertir $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b$ a forma estándar, añadimos una dimensión z y tomamos $z \geq 0, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - z = b$. La conversión para $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b$ es análoga. A estas nuevas variables las llamamos **variables de holgura**.

DRAFT

1.3. Método gráfico

Para resolver problemas bidimensionales. Representamos gráficamente el conjunto factible, con dos rectas distintas en las que, en cada una, el valor de la función objetivo es constante. Estas rectas son paralelas. Para maximizar, tomamos imaginariamente la recta de este tipo con mayor valor de la función objetivo que contenga algún punto del conjunto factible, y para minimizar, la recta de este tipo con menor valor. Hay tres posibilidades:

- Solución única: Esta recta corta con el conjunto factible en un sólo punto, un vértice del poliedro.
- Solución múltiple: La recta corta con el conjunto factible en una arista. Para ello, la recta formada al sustituir la desigualdad que genera la arista por una igualdad, esta debe ser paralela a las rectas con valor de la función objetivo constante.
- Solución **ilimitada**: Si el poliedro no es acotado, puede ocurrir que no haya una recta de este tipo con valor máximo o mínimo de la función objetivo, con lo que el problema no tiene solución.

Capítulo 2

Modelos de convexidad

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si $\forall x, y \in A, \lambda \in [0,1], (1-\lambda)x + \lambda y \in A$. Por ejemplo, los espacios y semiespacios afines son convexos.

Se ve fácilmente que la intersección arbitraria de convexos es convexa. La clausura de un convexo es convexa, así como su interior.

Dado un convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in A$ es un **punto extremo** de A si $\nexists a, b \in A, a \neq b, \lambda \in (0,1) : x = (1-\lambda)a + \lambda b$.

Un vector $d \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ es una **dirección** de A si $\forall x \in A, \lambda \geq 0, x + \lambda d \in A$. Los conjuntos acotados no tienen direcciones. Sean d_1 y d_2 direcciones de A y $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ no ambos nulos, $\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$ también es dirección de A. En efecto, sean $\tilde{d} := \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$, $x \in A$ y $\lambda \geq 0$, $x + \lambda \mu_1 d_1 \in A$ y por tanto $x + \lambda \mu_1 d_1 + \lambda \mu_2 d_2 = x + \lambda \tilde{d} \in A$. Con esto, $\tilde{d}$ es una **dirección extrema** de A si no existen direcciones d_1 y d_2 no proporcionales de A y $\mu_1, \mu_2 > 0$ tales que $\tilde{d} = \mu_1 d_1 + \mu_2 d_2$.

Decimos que $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es una **combinación convexa** de $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ tales que $\sum_k \lambda_k = 1$ y $\sum_k \lambda_k x_k = x$. El **teorema de Caratheodory** afirma que, si $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ es combinación convexa de $x_1, \ldots, x_m$ con $m > n$, también es combinación convexa de a lo sumo $n+1$ de los m puntos.

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, llamamos $\mathrm{cc}(A)$ al conjunto de combinaciones convexas de puntos cualesquiera de A, y **envolvente convexa** de A, $\mathrm{ec}(A)$, a la intersección de todos los convexos que contienen a A, y se tiene $\mathrm{ec}(A) = \mathrm{cc}(A)$.

Dados $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, el hiperplano $H := \{p \cdot x = \alpha\}$ divide el espacio en dos semiespacios $\{p \cdot x \leq \alpha\}$ y $\{p \cdot x \geq \alpha\}$. Decimos que H **separa** a los conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ si cada uno de los dos está contenido en un subespacio de estos distinto. La separación es **propia** si $A \cup B \nsubseteq H$; **estricta** si ninguno de los dos interseca con H, y **fuerte** si al menos uno de los dos conjuntos está a una distancia positiva de H. Propiedades:

1. Si A es convexo y cerrado e $y \notin \mathring{A}$, existe un hiperplano de separación entre A e $\{y\}$.

2. Si además $y \notin A$, existe un hiperplano de separación fuerte.

3. Si A y B son convexos disjuntos, existe un hiperplano de separación entre ellos.

4. Si además son cerrados y al menos uno de ellos es acotado, existe un hiperplano de separación acotado.

DRAFT

Teorema de Farkas: Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}^n$, de los sistemas

$$\begin{cases} Ax \leq 0 \\ c \cdot x > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} A^t y = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

exactamente uno tiene solución.

Demostración: Si ambos tienen soluciones respectivas x e y, entonces $Ax \leq 0$ e $y \geq 0$, luego $0 < c \cdot x = c^t x = y^t Ax = y \cdot Ax \leq 0\#$.

Si el segundo no tiene solución, sea $L := \{A^t y\}_{y\geq 0}$, queremos ver que L es convexo y cerrado. Para ver que es convexo, sean $a := A^t u, b := A^t v \in L$ y $\lambda \in [0,1]$, $m := (1-\lambda)a + \lambda b = A^t((1-\lambda)u + \lambda v)$, pero $(1-\lambda)u + \lambda v \geq 0$, luego $m \in L$. Para ver que es cerrado, sean $\{z_n := A^t y_n\}_n \in L$ con $\lim_n z_n =: z$ e $(y_{n_k})_k$ una subsucesión de $(y_n)_n$ convergente a y, entonces $z = \lim_n z_n = \lim_k z_{n_k} = A^t \lim_k y_{n_k} = A^t y$, y como debe ser $y \geq 0$, entonces $z = A^t y \in L$.

Finalmente, al ser L convexo y cerrado con $c \notin L$, existe un hiperplano de separación fuerte entre L y c, es decir, existen $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $p^t z \leq \alpha \forall z \in L$ y $p^t c > \alpha$. Haciendo $z := 0 \in L$ obtenemos $0 \leq \alpha$, por tanto

$$\begin{aligned} \forall z \in L, p^t z \leq \alpha \iff \forall y \geq 0, \alpha \geq p^t A^t y = y^t Ap \iff Ap \leq 0, \\ p^t c > \alpha \iff c \cdot x > \alpha \geq 0 \implies c \cdot x > 0, \end{aligned}$$

luego p cumple la primera ecuación.

Teorema de Gordan: Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, de los sistemas

$$Ax < 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} A^t y = 0 \\ y \geq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

exactamente uno tiene solución.

Demostración: Si ambos tienen soluciones respectivas x e y, entonces $0 = x^t A^t y = y^t Ax$, pero hay componentes de $y^t Ax$ estrictamente menores que $0\#$.

Si el primero no tiene solución, sean $L := \{z \in \mathbb{R}^n : z < 0\}$ y $M := \{Ax\}_{x\in\mathbb{R}^n}$, tenemos que L y M son disjuntos porque su intersección son las soluciones del primer sistema. Como ambos son convexos, existe un hiperplano de separación entre ambos, es decir, existen $p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $p^t z \leq \alpha \forall z \in L$ y $p^t w \geq \alpha \forall w \in M$. Sea $\{z_n\}_n \subseteq L$ con $\lim_n z_n = 0$, se tiene $\lim_n p^t z_n = 0$, y como $p^t z_n \leq \alpha \forall n$, $0 \leq \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} \forall w \in M, p^t w \geq \alpha \iff \forall x, p^t Ax \geq \alpha \geq 0 \implies \\ \implies p^t A(-A^t p) \geq 0 \implies -\|A^t p\|^2 \geq 0 \implies A^t p = 0, \\ \forall z < 0, p^t z \leq \alpha \iff p \geq 0, \\ p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \implies p \neq 0, \end{aligned}$$

luego p es solución de la segunda ecuación.

DRAFT

Capítulo 3

Representación de conjuntos poliédricos

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango m (por tanto $m \leq n$), $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. El conjunto $\{Ax = b\}$ es unipuntual si $m = n$ o infinito si $m < n$, por lo que nos centramos en problemas de maximizar o minimizar $\{c \cdot x : Ax = b, x \geq 0\}$ con $m < n$. Llamamos $A_1, \ldots, A_n$ a las columnas de A, con lo que, si $x \in \mathbb{R}^n$, $Ax = \sum_k x_k A_k$.

Dado $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, la submatriz $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ formada por las columnas de A con índice en S es **básica** si es de rango máximo. Entonces, de las variables $x_1, \ldots, x_n$, decimos que x_k es una **variable básica** ($x_k : B$ o $k : B$) si $k \in S$, y de lo contrario decimos que es **no básica** ($x_k : N$ o $k : N$, si N es la submatriz formada por las columnas de A con índice no en S).

En adelante, si $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ y $\{1, \ldots, n\} \setminus S = \{t_1, \ldots, t_{n-m}\}$ con $s_1 < \ldots < s_m$ y $t_1 < \ldots < t_{n-m}$, llamamos $x_B := (x_{s_1}, \ldots, x_{s_m})$, $x_N := (x_{t_1}, \ldots, x_{t_{n-m}})$, $\mathbf{b}(x_1, \ldots, x_m) := \sum_k e_{s_k} x_k$ y $\mathbf{n}(x_1, \ldots, x_{n-m}) := \sum_k e_{t_k} x_k$, $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\mathbf{n} \in \mathcal{M}_{n\times(n-m)}(\mathbb{R})$. Entonces (B, N) es una descomposición de A por m columnas.

Llamamos **solución básica** a $x \in \mathbb{R}$ con $x_N = 0$ y, por tanto, como $Ax = Bx_B + Nx_N = b$, $x_B = B^{-1}b$, y decimos que es **factible** si $x \geq 0$.

Dado $F := \{Ax = b, x \geq 0\}$, $x \in F$ es un punto extremo si y sólo si es una solución básica factible. Además, si $F \neq \emptyset$, existe al menos un punto extremo.

$\Longrightarrow$] Podemos suponer, reordenando el sistema, que $x =: (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ con $x_1, \ldots, x_p > 0$, y basta ver que $A_1, \ldots, A_p$ son linealmente independientes, pues entonces habrá otras $m - p$ columnas con las que formar una matriz básica. Supongamos que existe $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_p, 0, \ldots, 0) \neq 0$ tal que $\sum_k \mu_k A_k = 0$. Sean

$$\alpha := \text{mín}\left\{\left|\frac{x_k}{\mu_k}\right| : k \in \{1, \ldots, p\}, \mu_k \neq 0\right\},$$

$a := x + \alpha\mu$ y $b := x - \alpha\mu$, entonces $a \in F$, pues $Aa = Ax + \alpha A\mu = b + \alpha \sum_k \mu_k A_k = b$ y, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, bien $\mu_k \geq 0$, bien $\alpha \leq -\frac{x_k}{\mu_k}$, con lo que $a_k = x_k + \alpha\mu_k \geq 0$ y $a \geq 0$; análogamente, $b \in F$. Pero entonces $x = \frac{a+b}{2}$ con $a, b \in F$ y $a \neq b$, con lo que x no es un punto extremo.#

DRAFT

Esto nos permite hallar puntos extremos, pues existe un r con $\alpha := \left|\frac{x_r}{\mu_r}\right|$ y, por tanto, bien $a_r = 0$ si $\mu_r < 0$ o $b_r = 0$ si $\mu_r > 0$, y repitiendo este proceso con a o b según corresponda, se llega a un punto en que las columnas de A asociadas a componentes no nulas son linealmente independientes.

$\Longleftarrow$] Sea B una matriz básica cuya solución básica es $x \geq 0$, con lo que $x = \mathbf{b}B^{-1}b$. Si existen $a, b \in F$ con $a \neq b$ y $\mu \in (0,1)$ tales que $x = (1-\mu)a + \mu b$, entonces $x_N = (1-\mu)a_N + \mu b_N = 0$, pero como $a_N, b_N \geq 0$, $a_N = b_N = 0$, luego a y b son soluciones básicas de B y, por unicidad, $a = b = x\#$.

Un vector $d \neq 0$ es una dirección de F si y sólo si $Ad = 0$, $d \geq 0$.

$\Longrightarrow$] Para $x \in F$ y $\lambda \geq 0$, $x + \lambda d \in F$, luego $A(x + \lambda d) = Ax + \lambda Ad = b + \lambda Ad = b$, y por tanto $Ad = 0$, y como $x + \lambda d \geq 0 \implies d \geq -\frac{x}{\lambda}$ para todo $\lambda \geq 0$, se tiene $d \geq 0$.

$\Longleftarrow$] Para $x \in F$ y $\lambda \geq 0$, $A(x + \lambda d) = Ax + \lambda Ad = b$ y $x + \lambda d \geq 0$.

Un vector $d \neq 0$ es una dirección extrema si y sólo si podemos escribir $A = \mathbf{b}B + \mathbf{n}N$ y existe un $k : N$ tal que $B^{-1}A_k \leq 0$ y $d = t(e_k - \mathbf{b}B^{-1}A_k)$ para algún $t > 0$.

$\Longrightarrow$] Como $Ad = 0$, $\sum_k d_k A_k = 0$, y como $d \geq 0$, podemos suponer, para $d_1, \ldots, d_p, d_k > 0$, que $d =: (d_1, \ldots, d_p, 0, \ldots, 0, d_k, 0, \ldots, 0)$. Si $A_1, \ldots, A_p$ son linealmente dependientes, existiría $\mu := (\mu_1, \ldots, \mu_p, 0, \ldots, 0) \neq 0$ con $\sum_k \mu_k A_k = 0$, y tomando

$$\alpha := \text{mín}\left\{\left|\frac{d_k}{\mu_k}\right| : k \in \{1, \ldots, p\}, \mu_k \neq 0\right\},$$

$a := d + \alpha\mu$ y $b := d - \alpha\mu$, a es una dirección, pues $Aa = Ad + \alpha A\mu = \sum_k \mu_k A_k = 0$ y, para $i \in \{1, \ldots, p\}$, $a_i = d_i + \alpha\mu_i \geq 0$; análogamente b es una dirección, y como $d = \frac{a+b}{2}$, y a y b no son proporcionales porque entonces μ sería proporcional a d, imposible porque $\mu_k = 0$ y $d_k \neq 0$, d no sería una dirección extrema.# Entonces podemos completar $A_1, \ldots, A_p$ con otras $m - p$ columnas linealmente independientes para formar la base B, sabiendo que A_k no es una de ellas porque $Ad = 0$ y por tanto $A_1, \ldots, A_p, A_k$ son linealmente dependientes. Finalmente, $Ad = \sum_{i:B} d_i A_i + d_k A_k = Bd_B + d_k A_k = 0$, luego $d_B = -B^{-1}d_k A_k$, y como $d_k > 0$, $-B^{-1}A_k \geq 0$ y $B^{-1}A_k \leq 0$.

$\Longleftarrow$] $Ad = Bd_B + Nd_N = -tBB^{-1}A_k + tA_k = 0$, y como $B^{-1}A_k \leq 0$, $d \geq 0$. Si d no es extrema, habría direcciones a y b de F independientes y $\mu \in (0,1)$ tales que $d = (1-\mu)a + \mu b$. Entonces $-tB^{-1}A_k = (1-\mu)a_B + \mu b_B$ y, sea j tal que $\mathbf{n}e_j = e_k$, $te_j = (1-\mu)a_N + \mu b_N$, por lo que $a_N =: \gamma e_j$ y $b_N =: \delta e_j$. Como a es dirección, $Aa = \sum_{i:B} a_i A_i + a_k A_k = Ba_B + \gamma A_k = 0$ y $a_B = -\gamma B^{-1}A_k = \gamma d_B$, y análogamente, $Ab = \delta d_B$, con lo que a y b son proporcionales.#

Si $r : B$, $k : N$, $(B^{-1}A_k)_r \neq 0$, entonces la submatriz B' de A de tamaño $m \times m$ formada por las columnas que están en B salvo A_r y por A_k es una matriz básica. **Demostración:** Supongamos que existen $(\mu_i)_{i:B'}$ no todos nulos tales que $\sum_{\substack{i:B \\ i \neq r}} \mu_i A_i + \mu_k A_k = 0$. Sabemos que $\{A_i\}_{i:B}$ son linealmente independientes, luego debe ser $\mu_k \neq 0$ y por tanto $A_k = -\sum_{\substack{i:B \\ i \neq r}} \frac{\mu_i}{\mu_k} A_i$. Ahora bien, sea $v := B^{-1}A_k$, $A_k = Bu = \sum_{i:B} u_i A_i$, y restando, $\sum_{i:B} u_i A_i + \sum_{\substack{i:B \\ i \neq r}} \frac{\mu_i}{\mu_k} A_i = 0$,

DRAFT

pero como esto es combinación lineal de los $\{A_i\}_{i:B}$, que son linealmente independientes, queda $u_r = (B^{-1}A_k)_r = 0\#$.

Teorema de representación: Sean $X := \{x_1, \ldots, x_r\}$ los puntos extremos y $D := \{d_1, \ldots, d_s\}$ las direcciones extremas de $F \neq \emptyset$, si

$$\begin{aligned} L &:= \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j d_j : \lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ x + \sum_{j=1}^{s} \mu_j d_j \right\}_{x \in \mathrm{cc}\{x_1, \ldots, x_p\}, \mu \geq 0}, \end{aligned}$$

entonces $F = L$.

$\subseteq$] Supongamos que existe $z \in F \setminus L$. Al ser L convexo y cerrado con $z \notin L$, existen $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\forall x \in L, p \cdot x \leq \alpha$ pero $p \cdot z > \alpha$. Fijados $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ con $\sum_i \lambda_i = 1$,

$$p \cdot \left(\sum_i \lambda_i x_i + \sum_j \mu_j x_j \right) = \sum_i \lambda_i p \cdot x_i + \sum_j \mu_j p \cdot d_j \leq \alpha$$

para cualesquiera $\mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0$, luego $p \cdot d_j \leq 0$ para $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Como $z \in F$, $Az = b$, luego tomando t tal que $p \cdot x_t = \text{máx}\{p \cdot x_i\}$ y la descomposición $A = \mathbf{b}B + \mathbf{n}N$ asociada a x_t, $b = Bz_B + Nz_N$ y $z_B = B^{-1}b - B^{-1}Nz_N$, y como $p \cdot x_t \leq \alpha < p \cdot z$, $p \cdot (z - x_t) = p_B \cdot (z_B - x_{tB}) + p_N \cdot (z_N - x_{tN}) = p_B \cdot (B^{-1}b - B^{-1}Nz_N - B^{-1}b) + p_N \cdot z_N = (p_N^t - p_B^t B^{-1}N)z_N > 0$. De aquí que existe $k : N$ con $z_k > 0$ y $p_k - p_B^t B^{-1} A_k > 0$.

Sea ahora $y_k := B^{-1}A_k$, si $y_k \leq 0$, $d_k := e_k - \mathbf{b}y_k$ es una dirección extrema, por lo que $pd_k = p_k - p_B B^{-1} A_k \leq 0.\#$ Por tanto $y_k \not\leq 0$, y llamando $s_\lambda := x_t + \lambda(e_k - \mathbf{b}y_k)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{n}e_j := e_k$, $As_\lambda = Ax_t + \lambda A(e_k - \mathbf{b}y_k) = b + \lambda(Ne_j - By_k) = b + \lambda(A_k - A_k) = b$. Por otro lado, $s_\lambda \geq 0$ si y sólo si $\lambda \geq 0$ ($s_{\lambda k} = \lambda$) y

$$\lambda \leq \lambda_0 := \text{mín} \left\{ \frac{x_{ti}}{y_{ki}} : y_{ki} > 0 \right\} =: \frac{x_{tr}}{y_{kr}},$$

con lo que $s_{\lambda_0} \in F$.

Aplicando la proposición anterior y la definición de y_k, las columnas $\{A_i\}_{\substack{i:B \\ i \neq r}} \cup \{A_k\}$ forman una matriz básica, y como $s_{\lambda_0 r} = x_{tr} - \frac{x_{tr}}{y_{kr}} y_{kr} = 0$, vemos que $x' := s_{\lambda_0}$ es su punto extremo asociado. Pero si $x_{tB} > 0$, entonces $\lambda_0 > 0$ y $p \cdot x' = p \cdot x_t + \lambda_0 p(e_k - \mathbf{b}y_k) = p \cdot x_t + \lambda_0(p_N \cdot e_j - p_B \cdot y_k) = p \cdot x_t + \lambda_0(p_k - p_B \cdot B^{-1}A_k)$, pero de $(p_N^t - p_B^t B^{-1} A_k)z_N > 0$, como $z_N \geq 0$, deducimos que $p_k - p_B \cdot B^{-1}A_k > 0$, con lo que $p \cdot x' > p \cdot x_t$, pero esto es imposible porque hemos tomado $x_t = \text{máx}\{p \cdot x_i\}\#$.

$\supseteq$] Por convexidad, para $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, $\sum_i \lambda_i x_i \in F$, y para $\mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0$, $\sum_j \mu_j d_j$ es dirección de F.

DRAFT

De aquí que, si F no está acotado, tiene al menos una dirección extrema, pues de lo contrario, si $x_1, \ldots, x_r$ son los puntos extremos de F, todo $y \in F$ sería de la forma $y := \sum \lambda_i x_i$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$, luego $\|y\| \leq \sum \|\lambda_i x_i\| = \sum \lambda_i \|x_i\| \leq \sum \lambda_i \operatorname{máx} \|x_i\| = \operatorname{máx} \|x_i\|$ y F sería acotado.

Teorema fundamental de la optimización lineal: Sean $F := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ y $c \in \mathbb{R}^n$, existe $\operatorname{mín}_{x \in F} c \cdot x$ si y sólo si $c \cdot d \geq 0$ para toda d dirección extrema de F, en cuyo caso el mínimo se alcanza en un x punto extremo de F. Análogamente, existe $\operatorname{máx}_{x \in F} c \cdot x$ si y sólo si $c \cdot d \leq 0$ para toda d dirección extrema de F, en cuyo caso el máximo se alcanza en un x punto extremo de F.

Demostración: Por el teorema de representación, si $x_1, \ldots, x_r$ son los puntos extremos y $d_1, \ldots, d_r$ las direcciones extremas de F, todo $x \in F$ es de la forma $x = \sum \lambda_i x_i + \sum \mu_j d_j$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$, y entonces $c \cdot x = \sum \lambda_i c \cdot x_i + \sum \mu_j c \cdot d_j$. Si $d_j \geq 0$ para cada j, $c \cdot x \geq \sum \lambda_i c \cdot x_i \geq \sum \lambda_i \operatorname{mín}\{c \cdot x_i\} = \operatorname{mín}\{c \cdot x_i\} =: c \cdot x_k$, y tenemos un punto extremo donde se alcanza el mínimo. Recíprocamente, si existe $x \in F$ con $c \cdot x$ mínimo, para cada j, $c \cdot x + c \cdot d_j = c \cdot (x + d_j) \geq c \cdot x$ y por tanto $c \cdot d_j \geq 0$.

DRAFT

Capítulo 4

Algoritmo del símplex

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango máximo con $m \leq n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $F := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, $P := \{c \cdot x\}_{x\in F}$. Si x es un punto extremo de F con base asociada B de forma que $A =: \mathbf{b}B + \mathbf{n}N$ y $z := (c_B B^{-1} A_k)_k \in \mathbb{R}^n$:

- $(z - c)_B = 0$.

  $z_B = c_B B^{-1} B = c_B$.

- Para $s \in F$, $c \cdot s = c \cdot x - (z - c)_N \cdot s_N = c \cdot x - (z - c) \cdot s$.

  $As = Bs_B + Ns_N = b$, luego $s_B = B^{-1}b - B^{-1}Ns_N$ y

$$\begin{aligned} c \cdot s = c_B \cdot (B^{-1}b - B^{-1}Ns_N) + c_N \cdot s_N = c_B \cdot B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N)s_N = \\ = c \cdot x - (c_B^t B^{-1}N - c_N^t)s_N = c \cdot x - \sum_{k:N}(c_B^t B^{-1}A_k - c_k)s_k = \\ = c \cdot x - \sum_{k:N}(z_k - c_k)s_k = c \cdot x - (z - c)_N \cdot s_N. \end{aligned}$$

  La última igualdad se deduce de que $(z - c)_B \cdot s_B = 0 \cdot s_B = 0$.

- Si $z - c \leq 0$, entonces $x = \min P$ y decimos que x es un **minimizador**, y si $z - c \geq 0$, $x = \max P$ y decimos que x es un **maximizador**.

  Basta aplicar la fórmula anterior a un $s \in F$ arbitrario teniendo en cuenta que $s \geq 0$.

- Si $z - c < 0$, x es el único minimizador, y si $z - c > 0$, x es el único maximizador.

  Se deduce de la fórmula.

Sean $y := B^{-1}A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $k : N$.

- Si $y_k \leq 0$, $d := e_k - \mathbf{b}y_k$ es una dirección extrema. Es una **dirección de ilimitación** si $(z - c)_k > 0$ y estamos minimizando, pues entonces $\lim_{\lambda\to+\infty} c \cdot (x + \lambda d) = -\infty$, o si $(z - c)_k < 0$ y estamos maximizando, pues entonces $\lim_{\lambda\to+\infty} c \cdot (x + \lambda d) = +\infty$.

  Para $\lambda \geq 0$, $x + \lambda d \in F$ y $c \cdot (x + \lambda d) = c \cdot x - (z - c)_N \cdot (x + \lambda d)_N = c \cdot x - (z - c)_N \cdot (\lambda e_k)_N = c \cdot x - \lambda(z - c)_k$.

DRAFT

- Si $y_k \not\leq 0$, sean $\lambda_0 := \text{mín}\left\{\frac{x_i}{y_{ik}} : (i : B), y_{ik} > 0\right\}$, $\frac{x_r}{y_{rk}} := y_0$ y B' la submatriz de A resultante de eliminar la columna A_r de la matriz B y añadir A_k. Entonces B' es una matriz básica, y su punto extremo es $x' := x + \lambda_0(e_k - \mathbf{b}y_k)$. Además $c \cdot x' < c \cdot x$ si $z_k - c_k > 0$, $c \cdot x' > c \cdot x$ si $z_k - c_k < 0$ y $c \cdot x' = c \cdot x$ si $z_k - c_k = 0$.

  Tenemos $Ax' = Ax + \lambda_0 A(e_k - \mathbf{b}y_k) = b + \lambda_0(Ne_k - By_k) = b + \lambda_0(A_k - A_k) = b$. Además,

$$s_{\lambda_0 i} = \begin{cases} x_i - \lambda y_{ik} & \text{si } i : B, \\ 0 & \text{si } i : N \wedge i \neq k, \\ \lambda & \text{si } i = k, \end{cases}$$

  luego $x' = 0$, pues $\lambda_0 \geq 0$ y, para $i : B$, bien $y_{ik} = 0$ y $x'_i = x_i \geq 0$, bien $y_{ik} < 0$ y $x'_i = x_i - \lambda_0 y_{ik} \geq x'_i \geq 0$, bien $y_{ik} > 0$ y $x'_i = x_i - \frac{x_r}{y_{rk}} y_{ik} \geq x_i - \frac{x_i}{y_{ik}} y_{ik} = 0$. Por tanto $x' \in F$ y $c \cdot x' = c \cdot x - \lambda_0(z_k - c_k)$, de donde resulta la desigualdad del enunciado. Por el capítulo anterior, la submatriz B' es básica, y como $x'_r = 0$, x' es su correspondiente punto extremo.

El conjunto de minimizadores y el de maximizadores son convexos, pues si x e y son soluciones óptimas con $c \cdot x = c \cdot y = z$, para $\lambda \in [0, 1]$, $c \cdot ((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)z + \lambda z = z$.

Todo esto justifica el **algoritmo del símplex**, cuya versión para minimizar es el Algoritmo 4.1. Si quisiéramos maximizar, en el paso 4 minimizaríamos q_k, y en el paso 5 haríamos las comparaciones opuestas. Este algoritmo se suele hacer con una **tabla del símplex** como la siguiente:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ c_B & \sigma & Y & x_B \\ | & | & & | \\ \hline & & - \quad q \quad - & z \end{array}\right)$$

En esta, z es el coste total. Tenemos $Y = B^{-1}A = \mathbf{b}B^{-1}B + \mathbf{n}B^{-1}N = \mathbf{b} + \mathbf{n}B^{-1}N$, luego para pasar de la tabla del símplex de una iteración a la de la iteración siguiente, basta conseguir una matriz identidad en las columnas correspondientes a la base haciendo operaciones por filas en la submatriz $\left(\begin{array}{c|c} Y & x_B \end{array}\right)$, asegurándonos de que $x \geq 0$, y calcular q y z. Nótese que, por escrito, para que sea más intuitivo, si $\sigma(i) = k$, en vez de k escribimos x_k.

Un punto extremo x asociado a una base B es **degenerado** si existe $i : B$ con $x_i = 0$; entonces, en el paso 7 del algoritmo del símplex, se pivotará este elemento, se tendrá $\frac{x_{\sigma(i)}}{Y_{ik}} = 0$ y x valdrá lo mismo en la siguiente iteración. También se puede dar **ciclaje**, consistente en ir cambiando de base de forma cíclica. Estas dos situaciones pueden hacer que el algoritmo no acabe, lo que se puede evitar usando la **regla de Bland:** al principio del paso 7, se establece k al menor índice con $q_k > 0$, y si hay varios r que minimizan $\frac{x_{\sigma(r)}}{Y_{rk}}$, se elige el de menor $\sigma(r)$.

DRAFT

Algoritmo 4.1 Algoritmo del símplex para minimización.

Este algoritmo parte de $m, n \in \mathbb{N}^*$ con $m < n$, una matriz A de tamaño $m \times n$, un vector b de m elementos y uno c de n elementos, y calcula los puntos de $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ que minimizan $c \cdot x$ o, si la hay, una dirección de ilimitación. Para ello usa como variables una lista σ de m enteros distintos de 1 a n, vectores q, x y d de tamaño n, matrices T e Y de tamaño $m \times n$, un entero k entre 1 y n, un entero r entre 1 y m, un número λ y conjuntos S y D de vectores de tamaño n. El resultado es $\{x + \lambda u\}_{x \in \mathrm{cc}(S), u \in D}$ si $d = 0$ o dirección de ilimitación d en caso contrario.

1. [Inicializar] Hacer $S \leftarrow \emptyset$, $D \leftarrow \emptyset$ y $d \leftarrow 0$.

2. [Base inicial] Buscar un valor para σ de forma que $A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(m)}$ sean linealmente independientes. (Estas serán las columnas de B, lo que será usado en la notación. Se recomienda mantener un mapa de bits indicando qué números están en la lista en cada momento.)

3. [Establecer variables] Hacer $T \leftarrow \begin{pmatrix} A_{\sigma(1)} & \cdots & A_{\sigma(n)} \end{pmatrix}^{-1}$ y $x \leftarrow \mathbf{b}Tb$. Si $x \ngeq 0$, seguir buscando por el paso 2 (esto solo puede ocurrir en la primera iteración). Hacer $Y \leftarrow TA$ y $q \leftarrow c_B^t Y - c$ $(q = z - c)$.

4. [Buscar k] Buscar el $k : N$ que maximice q_k.

5. [¿Solución?] Si $q_k > 0$, saltar al paso 7. De lo contrario, añadir x a S. Si $q_k < 0$, terminar (solución única). De lo contrario, repetir el paso 6 para cada $k : N$ con $q_k = 0$ y terminar.

6. [Más soluciones] Si $Y_k \leq 0$, añadir $e_k - \mathbf{b}Y_k$ a D. De lo contrario, hallar r que minimice $\frac{x_{\sigma(r)}}{Y_{rk}}$ con $Y_{rk} > 0$, estableciendo λ a dicho valor, y añadir $x + \lambda(e_k - \mathbf{b}Y_k)$ a S.

7. [¿Ilimitación?] Si $Y_k \leq 0$, hacer $d \leftarrow (e_k - \mathbf{b}Y_k)$ y terminar. De lo contrario, hallar r que minimice $\frac{x_{\sigma(r)}}{Y_{rk}}$ con $Y_{rk} > 0$, hacer $\sigma(r) \leftarrow k$ (**pivotar**) y volver al paso 3.

DRAFT

Capítulo 5

Obtención de soluciones iniciales

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $F := \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ y $P := \{c \cdot x\}_{x\in F}$. Para encontrar una base inicial para el símplex, por cada $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que e_k no es una columna de A, añadimos una columna al final de A con valor e_k.

Entonces, si añadimos p variables artificiales y $T \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ es la matriz formada por las columnas añadidas, escribimos $F^* := \{(x, x^*) \in \mathbb{R}^{n+p} : Ax + Tx^* = b \wedge x, x^* \geq 0\}$ y vemos que $x \in F \iff (x, 0) \in F^*$. Los elementos de x^* son las **variables artificiales**, y x^* es el **vector de variables artificiales**.

5.1. Método de las dos fases

La primera fase consiste en hallar $\min\{\sum_i x_i^* : Ax + Tx^* = b \wedge x, x^* \geq 0\}$. Si el resultado es distinto de 0, no existe $x \in F$ con $(x, 0) \in F^*$ y por tanto el problema no es factible. Para la segunda fase:

1. Si la tabla del símplex al final de la primera fase no incluye variables artificiales básicas, tenemos una base de A, y la segunda fase consiste en eliminar las variables artificiales y maximizar o minimizar P a partir de esta base.

2. Si hay variables artificiales básicas, su valor debe ser 0 para que el problema sea factible. Entonces tendríamos un caso degenerado y el elemento de x en las filas correspondientes valdrían siempre 0 aun al volver al problema original, por lo que podemos eliminar las filas con variables artificiales y estaríamos en el primer caso.

DRAFT

5.2. Método de penalización

Sea $M > 0$ lo suficientemente grande, definimos $P_M := \{c \cdot x + M \sum_i x_i^*\}_{(x,x^*) \in F^*}$ si estamos minimizando o $P_{-M} := \{c \cdot x - M \sum_i x_i^*\}_{(x,x^*) \in F^*}$. En la práctica usamos

$$\begin{aligned} aM + b = cM + d \quad &:\Longleftrightarrow \quad a = c \wedge b = d, \\ aM + b \geq cM + d \quad &:\Longleftrightarrow \quad a > c \vee (a = c \wedge b \geq d). \end{aligned}$$

Así:

- Si hay soluciones óptimas (x, x^*), las soluciones con $x^* = 0$ son soluciones del problema original. Si no hay soluciones básicas de este tipo, el problema no es factible. En efecto, si $x \in F$, $(x, 0) \in F^*$ y $Ax + Tx^* = b + Tx^* \overset{x^* \geq 0, x^* \neq 0}{>} b$.
- Si hay dirección de ilimitación (d, d^*), sea (x, x^*) la solución básica asociada a la tabla del símplex:
  - Si $x^* = 0$, d es dirección de ilimitación del problema original.
    Si, por ejemplo, estamos minimizando, como $(c_1, \ldots, c_n, M, \ldots, M) \cdot (d, d^*) = c \cdot d + M \sum_i d_i^* < 0$, y M es lo suficientemente grande, entonces $d^* \leq 0$ y por tanto $d^* = 0$. Entonces, para $\lambda \geq 0$, $A(x + \lambda d) = A(x + \lambda d) + T(x^* + \lambda d^*) = b$, $x + \lambda d \geq 0$ y $c \cdot (x + \lambda d) = c \cdot x + \lambda c \cdot d$ tiende a $-\infty$ por ser (d, d^*) de ilimitación.
  - Si $x^* \neq 0$, en general no podemos decir nada.

DRAFT

Capítulo 6

Variantes del algoritmo del símplex

6.1. Método revisado

En el algoritmo del símplex, Y se usa para calcular q, y posteriormente solo se usa la columna Y_k. Si llamamos $w := c_B^t T$, entonces $q = c_B^t Y - c = c_B^t TA - c = w^t A - c$. Con esto no necesitamos hallar Y, sino solo $v := Y_k = TA_k$. Además, como q solo se usa para encontrar el k que maximice q_k, y posteriormente solo se usa $s := q_k$, no tenemos que almacenar todo q. Entonces podemos usar la siguiente tabla:

$$\left(\begin{array}{c|c|c||c|c}
| & | & & | & | \\
c & \sigma & T & x_B & v \\
| & | & & | & | \\
\hline
 & & - \quad w \quad - & z & s
\end{array}\right)$$

Para pasar de la tabla de una iteración a la de la siguiente, basta hacer las operaciones por filas en la submatriz $\left(\begin{array}{c|c} T & x_B \end{array}\right)$ que, si se hicieran en v, harían que v valiese e_r, y calcular w y z. El nuevo valor de s se calcula en el paso 4, y el de h en el paso 7.

6.2. Método para variables acotadas

Si tenemos desigualdades de la forma $a_k \leq x_k \leq b_k$, una primera reducción es hacer $y_k := x_k - a_k$ y entonces queda $y_k \leq b_k - a_k, y_k \geq 0$, o despejar el valor de la variable si $a_k = b_k$.

Sean ahora (I, U) una descomposición de A por p columnas, $h \in \mathbb{R}^p$, $h > 0$, $F := \{x : Ax = b, x_I \leq h, x \geq 0\}$ y $G := \{(x, y) : Ax = b, x_I + y_I = h, x \geq 0, y \geq 0\}$. Es claro que $x \in F \iff (x, h - x_I) \in G$. Además, x es punto extremo de F si y sólo si $(x, h - x_I)$ lo es de G.

$\Longrightarrow$] Si $(x, h - x_I) \in G$ no es un punto extremo de G, sean $\lambda \in (0, 1)$ y $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in G$ distintos con $(x, h - x_I) = (1 - \lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)$, entonces $x = (1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2$, pero $u_1, u_2 \in F$. Entonces, o x no es un punto extremo, o $u_1 = u_2 = x$, pero lo último es imposible porque entonces sería $v_1 = v_2$.

DRAFT

$\Longleftarrow$] Si $x \in F$ no es un punto extremo de F, sean $\lambda \in (0,1)$ y $u_1, u_2 \in F$ distintos con $x = (1-\lambda)u_1 + \lambda u_2$, entonces $(u_1, h - u_{1I}), (u_2, h - u_{2I}) \in G$ y $(1-\lambda)(u_1, h - u_{1I}) + \lambda(u_2, h - u_{2I}) = (x, h - x_I)$, con lo que $(x, h - x_I)$ no es un punto extremo de G.

Con esto $P := \{c \cdot x\}_{x \in F} = \{c \cdot x\}_{x \in G}$. Un punto $x \in F$ es extremo si y sólo si existe una descomposición (B, N_1, N_2) de A por m y k columnas, $0 \leq k \leq n - m, p$, con $|B| \neq 0$ tal que las columnas de N_1 están en I y $x = \mathbf{b}B^{-1}(b - N_1(\mathbf{i}h)_{N_1}) + \mathbf{n_1}(\mathbf{i}h)_{N_1}$.

$\Longrightarrow$] Sea $y := h - x_I$, si x es punto extremo de F, (x, y) lo es de G y es pues la solución básica asociada a una matriz básica B', de tamaño $m + p$ porque

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+p} : \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline \mathbf{i}I_p & I_p \end{array} \right) x = \left(\begin{array}{c} b \\ \hline h \end{array} \right), x \geq 0 \right\}.$$

Al menos m variables básicas deben estar en x, y si hay $m+k$ significa que hay k variables en y que se anulan, pero si $y_i = 0$, $x_{Ii} = h_i$, luego tomando N_1 como la submatriz formada por k columnas de I en las que $x_{Ii} = h_i$, B como las m columnas restantes de B' en x y N_2 como el resto de columnas, x_{N_1} y x_{N_2} tienen los valores que buscábamos, y como $b = Ax = Bx_B + N_1 x_{N_1} + N_2 x_{N_2}$, despejando queda $x_B = B^{-1}(b - N_1(\mathbf{i}h)_{N_1})$.

$\Longleftarrow$] Sean $u, v \in F$ y $\lambda \in (0,1)$ con $(1-\lambda)u + \lambda v = x$. Como $x_{N_2} = 0$, deben ser $u_{N_2} = v_{N_2} = 0$. Como $x_{N_1} = (\mathbf{i}h)_{N_1}$, deben ser $u_{N_1} = v_{N_1} = (\mathbf{i}h)_{N_1}$. Como $Au = Bu_B + N_1 u_{N_1} + N_2 u_{N_2} = b$ y $Av = Bv_B + N_1 v_{N_1} + N_2 v_{N_2} = Bv_B + N_1 u_{N_1} + N_2 u_{N_2} = b$, igualando queda $Bu_B = Bv_B$ y, como B es invertible, $u_B = v_B$ y $u = v$.

Sean x un punto extremo con descomposición asociada (B, N_1, N_2) y $z := (c_B B^{-1} A_k)_k \in \mathbb{R}^n$, si $(z - c)_{N_1} \geq 0$ y $(z - c)_{N_2} \leq 0$ entonces $c \cdot x = \min P$, y si $(z - c)_{N_1} \leq 0$ y $(z - c)_{N_2} \geq 0$ entonces $c \cdot x = \max P$. **Demostración:**

$$\begin{aligned} c \cdot s &= c_B \cdot s_B + c_{N_1} \cdot s_{N_1} + c_{N_2} \cdot s_{N_2} \\ &= c_B \cdot (B^{-1}b - B^{-1}N_1 s_{N_1} - B^{-1}N_2 s_{N_2}) + c_{N_1} \cdot s_{N_1} + c_{N_2} \cdot s_{N_2} \\ &= c_B^t B^{-1} b - (c_B^t B^{-1} N_1 - c_{N_1}^t) s_{N_1} - (c_B^t B^{-1} N_2 - c_{N_2}^t) s_{N_2} \\ &= c_B^t B^{-1} b - \sum_{k:N_1} (z_k - c_k) s_k - \sum_{k:N_2} (z_k - c_k) s_k, \end{aligned}$$

pero $s_{N_1} \leq x_{N_1}$ y $s_{N_2} \geq x_{N_2}$ para todo $s \in F$, de donde se obtiene el resultado.

Si existe $k : N_2$ con $z_k - c_k > 0$, sean $y := B^{-1}A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $s_\lambda := x + \lambda(e_k - \mathbf{b}y_k)$, $\iota : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$ tal que $\mathbf{i}e_k = e_{\iota(k)}$, $\lambda_1 := \min\{\frac{x_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\} =: \frac{x_r}{y_{rk}}$, $\lambda_2 := \min\{\frac{h_i - x_{\iota(i)}}{-y_{\iota(i)k}} : (\iota(i) : B), y_{\iota(i)k} < 0\} := \frac{h_u - x_{\iota(u)}}{-y_{\iota(u),k}}$,

$$\lambda_3 := \begin{cases} h_t & \text{si } \iota(t) = k, \\ +\infty & \text{si } k \not: I \end{cases}$$

y $\lambda_0 := \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \in (0, +\infty]$:

- $s_\lambda \in F$ si y sólo si $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$.

DRAFT

Si $\mathbf{n_2} e_j := e_k$, $As_\lambda = Ax + \lambda(N_2 e_j - By_k) = b + \lambda(A_k - BB^{-1}A_k) = b$. Tenemos

$$(s_\lambda)_i = \begin{cases} x_i + \lambda = \lambda & \text{si } i = k, \\ x_i - \lambda y_{ik} & \text{si } i : B, \\ x_i & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

luego $s_\lambda \geq 0$ si y sólo si $\lambda \geq 0$ y $\lambda \leq \text{mín}\{\frac{x_i}{y_{ik}} : (i : B), y_{ik} > 0\}$. Por otro lado, $(s_\lambda)_I \leq h$ si y sólo si $\lambda \leq \text{mín}\{\frac{h_i - x_{\iota(i)}}{-y_{\iota(i)k}} : (\iota(i) : B), y_{\iota(i)k} < 0\}$ y, si $k : I$ con $\iota(t) := k$, $\lambda \leq h_k$.

- Para $0 < \lambda \leq \lambda_0$, $c \cdot s_\lambda < c \cdot x$. En particular, si $\lambda_0 = +\infty$, $\lim_{\lambda \to +\infty} c \cdot s_\lambda \to -\infty$.
  $c \cdot s_\lambda = c \cdot x + \lambda c(e_k - \mathbf{b} y_k) = c \cdot x + \lambda(c_N e_j - c_B y_k) = c \cdot x + \lambda(c_k - z_k) = c \cdot x - \lambda(z_k - c_k) < c \cdot x$.
- Si $\lambda_0 = \lambda_1$, pasando A_r a N_2 y A_k a B, se obtiene otra descomposición de A que cumple las condiciones con punto extremo asociado s_{λ_0}.
- Si $\lambda_0 = \lambda_2$, pasando $A_{\iota(u)}$ a N_1 y A_k a B, se obtiene otra descomposición de A que cumple las condiciones con punto extremo asociado x' tal que $x'_i = s_{\lambda_0 i}$ para $i \neq \iota(u)$ y $x'_{\iota(u)} = h_u$.
- Si $\lambda_0 = \lambda_3$, pasando A_k a N_1, se obtiene otra descomposición de A que cumple las condiciones con punto extremo asociado x' tal que $x'_i = s_{\lambda_0 i}$ para $i \neq k$ y $x'_k = h_k$.

Análogamente, si existe $k : N_2$ con $z_k - c_k < 0$, $c \cdot s_\lambda > c \cdot x$ para $0 < \lambda \leq \lambda_0$ y el resto de propiedades se cumplen igual.

Para $k : N_1$, haciendo $x'_i = x_i$ para $i \neq k$, $x'_k = h_k - x_k$, $A'_k = -A_k$, $b' = b - h_k A'_k$, x' es el punto extremo asociado a la descomposición resultado de quitar A'_k de N'_1 y añadir A_k a N'_2.

Todo esto justifica el algoritmo de variables acotadas, cuya versión para minimizar es similar al algoritmo del símplex pero:

- Se añaden como entradas un entero p entre 0 y n, una función $\iota : \{1, \ldots, p\} \to \{1, \ldots, n\}$ estrictamente creciente y un vector h de m elementos. Se añade la restricción de que, para $k \in \{1, \ldots, p\}$, $x_{\iota(k)} \leq h_k$.
- Se añaden como variables números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entre 0 y $+\infty$, un índice u entre 1 y p, un índice w entre 1 y m y un vector v de p bits inicialmente a 0.
- En los pasos pasos 6 y 7, no se trata $y_k \leq 0$ como caso especial. En su lugar:
  - Hallar r que minimice $\lambda_1 \leftarrow \frac{x_{\sigma(r)}}{y_{rk}}$ con $y_{\sigma(r)k} > 0$. Si no existe r con $y_{\sigma(r)k} < 0$, hacer $\lambda_1 \leftarrow +\infty$.
  - Hallar u que minimice $\frac{h_u - x_{\iota(u)}}{-y_{\sigma^{-1}(\iota(u))k}}$ con $\iota(u) : B$ e $y_{\iota(u)k} < 0$. Si no existe u que cumpla las condiciones, hacer $\lambda_2 \leftarrow +\infty$.
  - Si existe u tal que $\iota(u) = k$, hacer $\lambda_3 \leftarrow h_u$. De lo contrario, $\lambda_3 \leftarrow +\infty$.
  - Hacer $\lambda \leftarrow \text{mín}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.
- Se definen una función γ que toma un vector x de tamaño n y, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, si $v_i = 1$, se hace $x_{\iota(i)} \leftarrow h_i - x_{\iota(i)}$, y una función δ similar pero que el cambio que hace es $x_{\iota(i)} \leftarrow -x_{\iota(i)}$.

DRAFT

- Al añadir un elemento x a S, se añade en su lugar $\gamma(x)$. Al añadir una dirección d a D, en vez de d se añade $\delta(d)$.

- Tras hacer esto en el paso 7:

  - Si $\lambda = +\infty$, hacer $d \leftarrow \delta(e_k - \mathbf{b}Y_k)$ y terminar.
  - Si $\lambda = \lambda_1$, hacer $\sigma(r) \leftarrow k$ y volver al paso 3.
  - Si $\lambda = \lambda_2$, hallar w tal que $\sigma(w) = \iota(u)$, hacer $x_{\iota(u)} \leftarrow h_s - x_{\iota(u)}$, $v_u \leftarrow 1 - v_u$, $c_{\iota(u)} \leftarrow -c_{\iota(u)}$ y $\sigma(w) \leftarrow k$, y volver al paso 3.
  - Si $\lambda = \lambda_3$, hacer $x_k \leftarrow h_u - x_k$ $[\iota(u) = k]$, $v_u \leftarrow 1 - v_u$, $c_{\iota(u)} \leftarrow -c_{\iota(u)}$ y volver al paso 3.

Para maximizar, se hacen los mismos cambios al algoritmo del símplex para maximizar. En la práctica, cuando $\lambda = \lambda_3$, se cambia el signo de la columna $\iota(u)$ y se añade una marca indicando que la variable $x_{\iota(u)}$ realmente es la variable $x'_{\iota(u)}$ (con $x'_{\iota(u)} = h_u - x_{\iota(u)}$), desde entonces se considera cambiado el signo de $c_{\iota(u)}$, se cambia el signo de $Y_{\iota(u)}$ y $q_{\iota(u)}$ y se hace $x \leftarrow x + q_{\iota(u)} Y_k$. Cuando $\lambda = \lambda_2$, primero se cambia el signo de la fila w de Y salvo el elemento Y_{ww}, se hace $x_{\iota(u)} \leftarrow h_u - x_{\iota(u)}$ y se pivota Y_{wk}.

DRAFT

Capítulo 7

Dualidad

Sea el **problema primal** minimizar $\{c\cdot x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ con m restricciones y n variables, el **problema dual** es uno de maximizar con m variables y n restricciones. Su función objetivo viene dada por el vector b y las restricciones están definidas por las columnas de A. Este problema es el de maximizar $\{b \cdot u : A^t u \leq c, u \geq 0\}$.

Ejemplo: Dado el problema

$$\begin{cases} \text{mín} & -2x_1 + x_2 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases} \quad \underset{x_2=y_2-y_3}{\overset{x_1=y_1}{\equiv}} \quad \begin{cases} \text{mín} & -2y_1 + y_2 - y_3 \\ & 3y_1 - y_2 + y_3 \geq -7 \\ & y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 6 \end{cases},$$

su dual es

$$\begin{cases} \text{máx} & -7u_1 + 6u_2 \\ & 3u_1 + u_2 \leq -2 \\ & -u_1 + 2u_2 \leq 1 \\ & u_1 - 2u_2 \leq -1 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}.$$

: Ahora bien, si el dual es maximizar $\{b \cdot u : A^t u \leq c, u \geq 0\}$, esto equivale a minimizar $\{-b \cdot u : -A^t u \geq -c, u \geq 0\}$, cuyo dual es a su vez maximizar $\{-c \cdot x : -Ax \leq -b, x \geq 0\}$, que equivale a minimizar $\{c \cdot x : Ax \geq b, x \geq 0\}$, el problema original.

Caso general:

	mín	máx	
Restricciones	$\leq$	$\leq$	Variables
	$\geq$	$\geq$	
	$=$	no restringida	
Variables	$\geq$	$\leq$	Restricciones
	$\leq$	$\geq$	
	no restringida	$=$	

Ejemplo anterior:

$$\begin{cases} \text{mín} & -2x_1 + x_2 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} \text{máx} & -7x_1 + 6x_2 \\ & -3w_1 + w_2 \leq -2 \\ & w_1 + 2w_2 = 1 \\ & w_1 \leq 0, w_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Este dual es el mismo que el anterior, con $w_1 = -u_1$, $w_2 = u_2$.

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} \text{máx} & -3x_1 + 4x_3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_2 - x_3 = 4 \\ \hline & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} \text{mín} & u_1 + 4u_2 \\ & u_1 \leq -3 \\ & -u_1 + u_2 \geq 0 \\ & u_1 - u_2 = 4 \\ \hline & u_1 \leq 0 \end{cases}.$$

7.1. Teorema de dualidad

Por ahora trabajamos en la forma canónica: $P : \text{mín}\{c \cdot x : Ax \geq b, x \geq 0\}$.

Teorema de dualidad débil: Si x_0 y u_0 son factibles en P (el primal) y D (el dual) respectivamente, entonces $c \cdot x_0 \geq b \cdot u_0$. **Demostración:** x_0 cumple $Ax_0 \geq b$ y u_0 cumple $A^t u_0 = (u_0^t A)^t \leq c$. Multiplicando, $u_0^t A x_0 \geq u_0^t b = b \cdot u_0$ y $u_0^t A x_0 \leq c^t x_0 = c \cdot x_0$.

Corolario: Si x_0 y u_0 son factibles en P y D respectivamente y $c \cdot x_0 = b \cdot u_0$, entonces x_0 es solución óptima de P y u_0 lo es de D.

Corolario: Si uno de los dos problemas es ilimitado, el otro es infactible. [Nota: el recíproco no se cumple.]

Teorema de dualidad fuerte: Si uno de los dos problemas P y D tiene solución óptima, el otro también la tiene y los valores óptimos coinciden.

Demostración: Podemos suponer que es P el que tiene solución óptima x, con lo que $Ax \geq b$ y $x \geq 0$, y reordenando las filas de A, descomponiendo como $A = (A_{(1)}, A_{(2)})$, $b = (b_{(1)}, b_{(2)})$, con $A_{(1)}x = b_{(1)}$ y $A_{(2)}x = b_{(2)}$, entonces $x = (x_{(1)}, 0)$ ($|x_{(1)}| =: p$, $|x_{(2)}| = n - p$. El siguiente sistema no tiene solución:

$$\begin{cases} A_{(1)}d \geq 0 \\ d_{(2)} \geq 0 \\ c \cdot d < 0 \end{cases}.$$

En efecto, si existiera tal d, entonces para $\lambda \geq 0$, $A(x + \lambda d) = (A_{(1)}(x + \lambda d), A_{(2)}(x + \lambda d)) = (A_{(1)}x + \lambda A_{(1)}d, A_{(2)}x + \lambda A_{(2)}d) \geq (b_{(1)}, b_{(2)}) = b$, y además $d \neq 0$ y $x + \lambda d \geq 0$ para $\lambda \in [0, \lambda_0]$ para algún $\lambda_0 > 0$. Entonces $c \cdot (x + \lambda_0 d) = c \cdot x + \lambda_0 c \cdot d < c \cdot x$, luego x no es mínimo.#

El sistema anterior lo podemos expresar como

$$-\left(\begin{array}{c} A_{(1)} \\ \hline 0 \;\big|\; I_{n-p} \end{array}\right) d \leq 0, \qquad c \cdot d < 0.$$

Por el teorema de Farkas, existe una solución de

$$\left(A_{(1)}^t \;\middle|\; \begin{array}{c} 0 \\ \hline I_{n-p} \end{array} \right) y = c, \qquad y \geq 0.$$

Lo primero equivale a que, si $y_{(1)} =: u$ e $y_{(2)} =: v$, transponiendo, entonces $uA + vI = c$, y como $u, v \geq 0$, $uA \leq c$, y u es factible en D. Pero $u(Ax-b) = (u,0)(A_{(1)}x-b_{(1)}, A_{(2)}x-b_{(2)}) = u(A_{(1)}x - b_{(1)}) = 0$. Entonces $(c - uA)x = vIx = vx = (0,v)(x_{(1)}, x_{(2)}) = (0,v)(x_{(1)}, 0) = 0$. Y bueno, copio literal:

$$P : \begin{cases} \text{mín} & c \cdot x \\ & a_{i.}x \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{cases} \qquad D : \begin{cases} \text{máx} & u \cdot b \\ & ua_{.j} \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, n \\ & u_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{cases} .$$

Teorema de complementariedad de holguras: x y u son soluciones óptimas de P y D respectivamente si se cumple:

- $x_j > 0 \implies ua_{.j} = c_j$.
- $a_i x > b_i \implies u_i = 0$.
- $u_i > 0 \implies a_i x = b_i$.
- $ua_{.j} < c_j \implies x_j = 0$.

Demostración: Se verifica $\begin{cases} Ax \geq b, x \geq 0 \\ uA \leq c, u \geq 0 \end{cases}$, $ub \leq uAx \leq cx = ub \implies ub = uAx = cx \sim$

- $u(Ax - b) = 0 \sim \sum_{i=1}^{m} u_i(a_{i.}x - b_i) = 0 \sim u_i(a_{i.}x - b_i) = 0$. $u_i > 0 \implies a_i x = b_i$, $a_i x > b_i \implies u_i = 0$.
-

7.2. Resolución de un problema de O.L. a partir de su dual

Por el teorema de complementariedad de holguras, $\overline{x}_j > 0 \to \overline{u}a_j = c_j$, $\sum_{j=1}^{n} a_j \overline{x}_j > b_i \to \overline{u}_i = 0$, $\overline{u}_i > 0 \to \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{x}_j = b_i$, $\overline{u}_j a_j < c_j \to \overline{x}_j = 0$.

$$P : \begin{cases} \text{mín} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ & x_j \geq 0 \forall j \end{cases}$$

Operando, $\overline{u}_1 = \frac{4}{5}$, $\overline{u}_2 = \frac{3}{5}$:

$$D:\begin{cases} u_1+2u_2\leq 2\rightarrow \dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{5}=2 \\ u_1-2u_2\leq 3\rightarrow \dfrac{4}{5}-\dfrac{6}{5}<3\rightarrow \overline{x}_2=0 \\ 2u_1+3u_2\leq 5\rightarrow \dfrac{8}{5}+\dfrac{9}{5}<5\rightarrow \overline{x}_3=0 \\ u_1+u_2\leq 2\rightarrow \dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}<2\rightarrow \overline{x}_4=0 \\ 3u_1+u_2\leq 3\rightarrow \dfrac{12}{5}+\dfrac{3}{5}=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{x}_1+3\overline{x}_5=4 \\ 2\overline{x}_1+\overline{x}_5=3 \end{cases}\rightarrow \overline{x}_1=1,\overline{x}_5=1$$

Usando la tabla del símplex, $(P):\text{mín}\{cx:Ax=b,x\geq 0\}$.
Tabla inicial:

$$\left(\begin{array}{c|c|ccc|ccc} & & a_{11} & \cdots & a_{1p} & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & a_{n1} & \cdots & a_{np} & & & 1 \\ \hline & & & & & & & \end{array}\right)$$

Tabla final:

$$\left(\begin{array}{c|c|ccc|ccc} & & y_{11} & \cdots & y_{1n} & & & \\ & & \vdots & & \vdots & & B^{-1} & \\ & & y_{n1} & \cdots & y_{nn} & & & \\ \hline & & & & & & & \end{array}\right)$$

Propiedad: Si $\overline{x}$ óptima de (P) y B la base asociada $\implies$ $\overline{u}=c_BB^{-1}$ sol. ópt. de (D).
Dem.:

$$\begin{aligned} &\overline{x}\text{ opt}\rightarrow z_j-c_j\leq 0\forall j \\ &z_j-c_j=c_By_j-c_j=c_BB^{-1}a_j-c_j=\overline{u}a_j-c_j\leq 0\forall j \\ &\qquad\rightarrow \overline{u}\text{ factible de }(D)\ (\overline{u}A\leq c) \\ &\overline{u}b=c_BB^{-1}b=c_B\overline{x}_B=c_B\overline{x}_B+c_N\overline{x}_N=c\overline{x} \end{aligned}$$

$$(P):\begin{cases} \text{mín}\quad 2x_1-x_2+x_3+x_4 \\ \qquad x_1-x_2+x_5\leq 3 \\ \qquad -3x_2+x_3+5x_5\leq 19 \\ \qquad -x_2+x_4+2x_5\leq 9 \end{cases}$$

Tabla final:

$$\left(\begin{array}{c|c|ccccc|c} 0 & x_5 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & x_2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 7 \\ 2 & x_1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ \hline & & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

7.3. Interpretación económica

Minimizar coste, m productos, b_i cantidad mínima a producir del producto i, n actividades, a_{ij} coste producto producido por unidad de la actividad j, c_j coste por unidad de la actividad j. $\text{mín} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.a. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$, $x_j \geq 0$.

Coste mínimo de producción $c\overline{x} = \overline{u}b = \sum_{i=1}^{m} \overline{u}_i b_i$. Si se produce una unidad extra del producto i, el coste sería $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} \overline{u}_j b_j + \overline{u}_i (b_i + 1) = z + \overline{u}_i$. Se le llama a $\overline{u}_i$ **precio sombra**.

Maximizar beneficios, b_i cantidad a producir del producto i, u_i precio unitario del producto i. $\text{máx} \sum_{i=1}^{m} u_i b_i$ s.a. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_i \leq c_j$.

Capítulo 8

Algoritmo dual del símplex

8.1. Base dual factible

$(P)\,\text{mín}\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$

Sea B una matriz básica de A, diremos que B es dual factible si $z_j - c_j = c_B B^{-1} A_j - c_j \leq 0 \forall j$ no básico.

Alg. símplex: Partir de una base factible (primal), $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$. Generar bases factibles hasta obtener una base $z_j - c_j \leq 0 \forall j$.

Alg. dual: Parte de base dual factible, $z_j - c_j \leq 0 \forall j$. Generar sucesión bases duales factibles hasta que se cumpla $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$.

P1: B es dual factible $\iff$ $u = c_B B^{-1}$ es una sol. factible del problema dual de (P).

Dem.:

$(D) : \text{máx}\{ub : uA \leq c\}$.

B dual fact. ~ $z_j - c_j \leq 0 \forall j$ ~ $c_B B^{-1} a_j - c_j \leq 0 \forall j$ ~ $ua_j \leq c_j \forall j$ ~ $uA \leq c$.

P2: B dual factible $\implies$ $u = c_B B^{-1}$ es un punto extremo de (P).

Dem.:

Hemos visto que $u = c_B B^{-1}$ es fact.

Supongamos u no es punto extremo $\longrightarrow \exists u^1, u^2$ fact. de (P) y distintos : $u = \lambda u^1 + (1-\lambda) u^2$

u^1 fact. $\longrightarrow u^1 A \leq c \rightarrow u^1 B \leq c_B$

u^2 fact. $\longrightarrow u^2 A \leq c \rightarrow u^2 B \leq c_B$

$u = \lambda u^1 + (1-\lambda) u^2 \rightarrow uB = \lambda u^1 B + (1-\lambda) u^2 B \rightarrow c_B B^{-1} B = c_B \leq \lambda c_B + (1-\lambda) c_B = c_B \rightarrow u^1 B = c_B, u^2 B = c_B \rightarrow u^1 = c_B B^{-1} = u^2 = c_B B^{-1}$.

—

Si P es de maximizar, B dual factible si $z_j - c_j \geq 0 \forall j$.

8.2. Cambio de base dual factible

Sea B dual factible, $\overline{b}_r < 0$ algún r.

Sale x_r de la base, supongamos que entra k en la base.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ c_B & \sigma & y' & I_B \\ | & | & & | \\ \hline & & z_j - c_j & z \end{array}\right)$$

$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}, i \neq r$
$y'_{ij} = \frac{y_{ij}}{y_{rk}}, i = k$
$\overline{b}'_i = \overline{b_i} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \overline{b}_r, i \neq k$
$\overline{b}'_i = \frac{\overline{b}_r}{y_{rk}}, i = k$
$(z_j - c_j)' = \sum_{i \neq k} c_i y'_{ij} + c_k y'_{ij} - c_j = \sum_{i \neq k} c_i (y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j = (z_j - c_r y_{rj}) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{i \neq k} c_i y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$
$z' = \sum_{i \neq k} c_i \overline{b}'_i + c_k \overline{b}'_k = \sum_{i \neq k} u(\overline{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \overline{b_i}) + c_k \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = z - c_r \overline{b_r} = \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} \sum_{i \neq k} -c_i y_{ik} + c_k \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = z - \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$.
$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$
a) Si $y_{rk} \geq 0 \forall j$ no básico, $0 \leq x_r + \sum_{j \text{ no básico} \geq 0} y_{rj} x_j = \overline{b}_r < 0 \rightarrow (P)$ infactible
b) $\exists k : y_{rk} < 0$. $(z_j - c_j) \leq 0 \tilde{} z_j - c_j \leq y_{rj}$
$z_j - c_j \leq \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$ si $y_{rk} < 0$
$\tilde{} \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \geq \frac{z_k - c_k}{y_{rk}}$ si $y_{rj} < 0$
Hay que elegir $k \tilde{} \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{mín}\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\}$.
Si el problema primal fuera de maximizar, elegir k sería $\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{máx}\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\}$.

$$\left| \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \right| = \text{mín} \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \right| : y_{rj} < 0 \right\}.$$

8.3. Mejora de la solución

$z' = z - \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \geq z$ ($\overline{b_r} < 0$, $y_{rk} < 0$, $z_k - c_k \leq 0$)
a) Si $z_k - c_k < 0$, $z' > z$.
$u = c_B B^{-1} \rightarrow u' = c'_B (B')^{-1}$
$\searrow ub = c_B B^{-1} b = c_B \overline{b} = z \searrow u'b = c_B (B')^{-1} b = c_B \overline{b}' = z'$.
b) Si $z_k - c_k = 0 \rightarrow z' = z$.
$(z_j - c_j)' = z_j - c_j \forall j$
$c_B B^{-1} I - c_I = c_B (B')^{-1} I - c_I$
$c_B B^{-1} = c_B (B')^{-1}$
$u = u'$

8.4. Algoritmo dual

Algoritmo
Paso inicial: Encontrar matriz B dual factible, $\overline{b}_r < 0$ y $z_j - c_j \leq 0 \forall j$. Hacer $k = 1$.
Paso k:

- $y_{rj} \geq 0 \forall j$ no básico, PARAR. Problema infactible.
- De lo contrario, determinar k tal que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{mín}\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\}.$$

  Pivotar en el elemento y_{rk} (sale x_r de la base, entra x_k en la base).

  Hacer $h = h + 1$ y continuar.

$(P) : \text{mín}\{cx : Ax \geq b, x \geq 0\}$, $c \geq 0$, $b \geq 0$.

$$\begin{cases} Ax - Ix^h = b \\ \qquad\qquad x \geq 0, x^h \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -Ax + Ix^h = -b \\ \qquad\qquad x \geq 0, x^h \geq 0 \\ \qquad\qquad B = I \end{cases}$$

$x_B = x^h = -b$, no es factible, $b \not\leq 0$
$z_j - c_j = c_B B^{-1} A_j - c_j = c_j \leq 0 \forall j$
$B = I$ dual factible
$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \text{mín}\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}, y_{rj} < 0\}$

8.5. Búsqueda de base inicial

Sea $B = I$ base

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} & & A|I & b \\ \hline & & z_j - c_j & \end{array}\right)$$

$b_r < 0$ algún r
$z_j - c_j > 0$ algún j (min)
Anadimos la siguiente restricción:

$$x_{n+1} + \sum_{j \text{no básico}} x_j = M$$

$M > 0$ y tan grande como queramos.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & A' & I & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & b \\ \hline & 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 & 1 & M \end{array}\right)$$

Entra k tal que $z_k - c_k = \text{máx}\{z_j - c_j\}$. Idual factible
$(z_k - c_j) \overset{\downarrow}{=} z_j - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k) = (z_j - c_j) - (z_k - c_k) \leq 0 \forall j$.

Capítulo 9

Sensibilidad y análisis paramétrico

$(P) : \text{mín}\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$.
Sea $\overline{x}$ solución óptima.
¿Sigue siendo $\overline{x}$ óptima si cambia
algún dato del problema? $\rightarrow$Análisis

9.1. Sensibilidad en el vector de costes

Supongamos que el coste $c_k \rightarrow c_k + \lambda$
Sea B la base asociada a $\overline{x}$.
a) Si k no es básica
$(z_k - c_k)' = c_B B^{-1} A_k - (c_k + \lambda) = (z_k - c_k) - \lambda$
Si $\lambda \geq z_k - c_k$, $\overline{x}$ sigue siendo óptimo.
b) Si k es básica

$$(z_j - c_j)' = [c_B + \lambda(0, \ldots, \overset{\overset{x_k}{\downarrow}}{1}, \ldots, 0)]B^{-1}a_j - c_j = (z_j - c_j) + \lambda(0, \ldots, 1, \ldots, 0)y_j$$
$$= (z_j - c_j) + \lambda y_{kj}$$

$$z_j - c_j \leq -\lambda y_{kj}$$

$$\forall j \sim \begin{cases} \frac{z_j - c_j}{-y_{kj}} \leq \lambda & \text{si } y_{kj} < 0 \\ \frac{z_j - c_j}{-y_{kj}} \geq \lambda & \text{si } y_{kj} > 0 \end{cases}$$

$$\text{máx}\left\{\frac{z_j - c_j}{-y_{kj}} : y_{kj} < 0\right\} \leq \lambda \leq \text{mín}\left\{\frac{z_j - c_j}{-y_{kj}} : y_{kj} > 0\right\}$$

Supongamos que el vector de costes cambia de c a
$c + \lambda d$.

$$(z_j - c_j)' = (c_B - \lambda d_B)B^{-1}A_j - (c_j + \lambda d_j) \leq b \sim$$
$$(z_j - c_j) + \lambda \overline{d_j} \text{ donde } \overline{d}_j = d_B B^{-1} a_j - d_j$$

$$(z_j - c_j)' \leq 0 \forall j \sim (z_j - c_j) + \lambda \overline{d}_j \leq 0 \forall j$$

$$I_1 = \text{máx}\{\frac{z_j - c_j}{-\overline{d}_j} : \overline{d}_j < 0\} \leq \lambda \leq \text{máx}\{\frac{z_j - c_j}{-\overline{d}_j} : \overline{d}_j > 0\} = I_2$$

$$\lambda \in [I_1, I_2] \ \overline{x} \text{ óptimo}$$

9.2. Sensibilidad en el vector b

Supongamos que $b \to b + \lambda e$
Si B es la base asociada a $\overline{x}$
$B^{-1}(b + \lambda e) \geq 0$
$B^{-1}b + \lambda B^{-1}e = \overline{b} - \lambda \overline{e} \geq 0$
$\overline{b}_i + \lambda \overline{e} \geq 0 \forall j \geq 0$

$$\begin{cases} \lambda \geq -\frac{\overline{b_i}}{\overline{e_i}} \text{si } \overline{e}_i > 0 \\ \lambda \leq -\frac{\overline{b_i}}{\overline{e}_i} \text{si } \overline{e}_i < 0 \end{cases} \text{máx}\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{e}_i} : \overline{e} > 0\} \leq \lambda \leq \text{mín}\{-\frac{\overline{b_i}}{\overline{e_i}} : \overline{e}_i < 0\}$$

9.3. Otros cambios

$P : \text{máx}\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$
$\tilde{x}$ sol. óptima
Cambio en una columna de A
Sea $a_k \to a_k + \lambda u_k$, k no básica
$\tilde{x} = B^{-1}b$
$z_k - c_k \to c_B B^{-1}(a_k + \lambda u_k) - c_k = z_k + \lambda c_B B^{-1} u_k - c_k = (z_k - c_k) + \lambda c_B B^{-1} u_k \cdots$
Añadir una cantidad x_{n+1}
a_{n+1} la columna correspondiente. $\tilde{x} = B^{-1}b$, $z_{n+1} - c_{n+1} = c_B B^{-1} a_{n+1} - c_{n+1} = \cdots$
Añadir una restricción
Sea α: $\sum \alpha_i x_i \leq b_{m+1}$ (bueno, seguir los otros apuntes)

9.4. Análisis paramétrico

Análisis paramétrico en el vector de costes.
Buscar todos los val. óptimos del problema

$$\text{mín}\{(c + \lambda c')x : Ax = b, x \geq 0\}, \lambda \in [\lambda_{\text{mín}}, \lambda_{\text{máx}}].$$

Supongamos $\lambda_{\text{mín}} \leq 0 \leq \lambda_{\text{máx}}$. Ver los otros apuntes.

9.5. Ejercicios

9.5.1. 1

$$\begin{cases} \text{máx} \quad -2x_1 + x_2 - x_3 + 1 \\ \qquad\qquad -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ \qquad\qquad x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_1 \leq 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_2 \geq -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Hacemos $y_1 = -x_1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3$. Añadimos una variable de holgura y_4 y una variable artificial y_5.

$$\begin{cases} \text{máx} \qquad 2y_1 + y_2 - y_3 \\ \qquad\qquad y_1 + 2y_2 + y_3 = 8 \\ \qquad -y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 = 4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y \geq 0 \end{cases}$$

Tras aplicar el método de las dos fases sin eliminar las variables artificiales, la tabla óptima queda

$$\left(\begin{array}{c|c|ccccc|c} 2 & y_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & y_4 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 12 \\ \hline & & 0 & 3 & 3 & 0 & - & \end{array}\right)$$

1. ¿Qué pasaría al hacer $c_2 = 5$?

   y_2 no es básica. Haciendo el cambio en la tabla óptima queda $q_2 = -1$, luego la solución ya no es óptima. Partiendo de la anterior tabla óptima, podemos ir pivotando hasta encontrar el punto óptimo.

2. ¿Y si $c_1 = 2$?

   El coeficiente para y_1 sería -2 por el cambio de variable. Como es básica, hay que recalcular para todos, y tendríamos $q = (0, -5, -1, 0, -)$, luego el valor ya no es óptimo.

3. ¿Cuál sería el intervalo para c_2 en el que la tabla sigue siendo óptima?

   Para un c_2 arbitrario, $q_2 = 4 - c_2$, luego $c_2 \in (-\infty, 4]$.

4. ¿Y para c_1?

   Para un c_1 arbitrario, $q = (0, 2c_1 - 1, c_1 + 1, 0, -)$, luego debe ser $2c_1 - 1 \geq 0 \iff c_1 \geq \frac{1}{2}$ y $c_1 + 1 \geq 0 \iff c_1 \geq -1$. Así, $c_1 \in [\frac{1}{2}, +\infty)$, y como esto es después del cambio de variable, realmente $c_1 \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$.

5. ¿Y si ahora $b_1 = 10$?

   Entonces $b' = (12, 4)$, y como

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\tilde{y}_B = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} \geq 0,$$

luego la solución sigue siendo óptima. Si saliera una variable negativa, la solución no es óptima, por lo que hay que partir de ahí para llegar a una tabla óptima pero esta vez usando el método dual del símplex.

6. ¿Cuál es el intervalo para b_1 para que esto siga siendo óptimo?

   Tras el cambio de variable,

$$B^{-1}b' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + 2 \\ b_1 + 6 \end{pmatrix} \geq 0 \iff b_1 \in [-2, +\infty).$$

7. ¿Qué ocurre al añadir la restricción $x_2 + x_3 \geq 2$?

   $x_2 + x_3 = y_2 + y_3 - 1 \geq 2 \iff y_2 + y_3 \geq 3$, pero $y_2 + y_3 = 0$, luego el punto óptimo anterior ya no es factible. Por tanto, añadimos la restricción a la tabla, cambiándola de signo para que la variable de holgura asociada esté en la base:

$$\left(\begin{array}{c|c|cccccc|c} 2 & y_1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & y_4 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & y_6 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ \hline & & 0 & 3 & 3 & 0 & - & 0 & \end{array}\right) \xrightarrow{y_6 \to y_3} \cdots$$

8. ¿Qué ocurre al añadir otra variable x_4 con $c_4 = 4$ y $A_4 = (1, 2)$?

   Llamemos $y_6 = x_4$. Entonces

$$Y_6 = B^{-1}A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   y, por tanto, $q_6 = c_B \cdot Y_6 - c_6 = 2 - 4 = -2 < 0$, luego la tabla no es óptima y hay que seguir con el algoritmo. Sabemos que sí interesa añadir x_4 porque nos da un valor óptimo mayor.